Wstęp do równań różniczkowych, studia I stopnia

1. Znaleźć (i narysować przykładowe) rozwiązania ogólne równania $y' = 2x$.
2. Znaleźć wszystkie (i narysować przykładowe) rozwiązania równania $y' + 3\sqrt[3]{y^2} = 0$, (Czy spełnione są tu założenia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności?).
3. Sprawdzić, że funkcja $y = x\sqrt{4 - x^2}$, $x \in (0, 2)$ jest rozwiązaniem równania $y' = \frac{y^2 - x^4}{xy}$ i wykazać, że jest to jedyne rozwiązanie tego równania spełniające warunek $y(1) = \sqrt{3}$.
4. Rozwiąż równanie: $y' = \frac{2x \ln x}{t}$, $x(1) = e$.
5. Rozwiąż równanie: $x' = \frac{x + \sqrt{x^2 + t^2}}{t}$, $x(-1) = 0$.
6. W tarczę wbija się pocisk o masie m z prędkością początkową v_0. Siła oporu tarczy jest proporcjonalna do kwadratu prędkości: $F = -bv^2$. Na jaką głębokość wbije się pocisk i po jakim czasie się zatrzyma?
7. Znaleźć roziązania następujących równań spełniające zadane warunki:
$$x' = -\frac{1}{t^2 \cos x}, \qquad \lim_{t \to \infty} x(t) = \frac{16\pi}{3},$$
$$y' = \frac{e^y - 1}{e^{4y}}, \quad y \quad \text{ograniczona} \quad \text{przy} \quad t \to \infty.$$
8.
9. Rozwiąż
$$\begin{cases} x' = -y \pm x(x^2 + y^2) \\ y' = x \pm y(x^2 + y^2) \end{cases}$$
10. Rozważmy wykresy rozwiązań równania $x' = p(t)x + q(t)$ i weźmy styczne do tych wykresów w punktach (t_0, x), gdzie $x \in \mathbb{R}$ należy do wykresu. Wykazać, że wszystkie te styczne przecinają się w jednym punkcie.
11. Rozwiąż równanie: $y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x$.
12. Rozwiąż równanie: $y' + \frac{2y}{x} = 4x^2 y\sqrt{y}$.
13. Rozwiąż równanie: $x' - \frac{2}{3}tx + \frac{2t^3}{x^2} = 0$, $x(0) = 1$.
14. Rozwiąż równanie: $(y^2 \sin x + 2xy)dx + (2y - y\cos x + 1)dy = 0$, $(\mu(y) = \frac{1}{y})$.
15. Rozwiąż równanie: $(2\ln(y - x) - \frac{x}{y-x})dx + (\frac{x}{y-x} + \frac{1}{xy})dy = 0$, $(\mu(x) = x)$.
16. Rozwiąż równanie: $e^{2t} - x^2 + x\frac{dx}{dt} = 0$, $(\mu(t) = e^{-2t})$.
17. Rozwiąż równanie: $1 + 3x^2 \sin y - x \operatorname{ctg} y \frac{dy}{dx} = 0$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$, $(\mu(y) - \frac{1}{\sin y})$.
18. Rozwiąż równanie: $2x \operatorname{tg} y + (x^2 - 2\sin y)\frac{dy}{dx} = 0$, $(\mu(y) = \cos y)$.

19. Rozwiąż równanie $(3y^2 - x)dx + (2y^3 - 6xy)dy = 0$ znajdując najpierw czynnik całkujący postaci $\mu = \mu(x + y^2)$, ($\mu(x, y) = \frac{1}{(x+y^2)^3}$).

20. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania:

$$\begin{cases} x' = -2x - 4y + 1 \\ y' = -x - 5y \end{cases}$$

21. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania:

$$\begin{cases} x' = 5x + 4y + e^t \\ y' = 4x + 5y + 1 \end{cases}$$

22. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania:

$$\begin{cases} x' = x - 2y + 3 \\ y' = x - y + 1 \end{cases}$$

23. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania:

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x + \cos(t) \end{cases}$$

24. Rozwiąż równanie $x'' - x = t^2 - t + 1$.

25. Rozwiąż równanie $x''' + x' = \frac{\sin t}{\cos^2 t}$.

26. Rozważyć równanie wahadła z tarciem

$$x'' + kx' + \omega^2 x = 0, \quad \omega > 0.$$

Przy jakich wartościach stałej k rozwiązania dążą do zera przy $t \to \infty$ (to znaczy kiedy zaobserwujemy drgania gasnące)?

27. Znaleźć rozwiązanie równania $x'' + tx' + x = 0$ w postaci szeregu potęgowego w otoczeniu punktu $t_0 = 0$.

28. Znaleźć rozwiązanie równania $x'' + \frac{3t}{1+t^2}x' + \frac{1}{1+t^2}x = 0$ w postaci szeregu potęgowego w otoczeniu punktu $t_0 = 0$.

29. Rozważmy zagadnienie początkowe na $\mathbb{R}$ postaci $x' = 0$, $x(0) = x_0$. Narysuj kilka przykładowych rozwiązań. Dla podanego równania rozważ odpowiedni układ dynamiczny i narysuj jego portret fazowy.

30. Rozważmy zagadnienie początkowe na $\mathbb{R}$ postaci $x' = 1$, $x(0) = x_0$. Narysuj kilka przykładowych rozwiązań. Dla podanego równania rozważ odpowiedni układ dynamiczny i narysuj jego portret fazowy.

31. Rozważmy zagadnienie początkowe na $\mathbb{R}$ postaci $x' = x$, $x(0) = x_0$. Narysuj kilka przykładowych rozwiązań. Dla podanego równania rozważ odpowiedni układ dynamiczny i narysuj jego portret fazowy.

32. Rozważmy zagadnienie początkowe na $\mathbb{R}$ postaci $x' = 1 - x$, $x(0) = x_0$. Narysuj kilka przykładowych rozwiązań. Dla podanego równania rozważ odpowiedni układ dynamiczny i narysuj jego portret fazowy.

33. Niech $x(t)$ oznacza liczbę komórek nowotworowych w czasie t i niech $x(0) = 0$. Załóżmy, że wszystkich zdrowych komórek w organiżmie jest K oraz, że komórka nowotworowa powstaje w miejsce komórki zdrowej. Zatem, jeśli powstaje jedna komórka nowotworowa, to jedna komórka zdrowa umiera. Tępo wzrostu komórek nowotworowych opisuje równanie:

$$x'(t) = \frac{(K^2 - x^2)}{x^4 + 13x^2 + 36}.$$

Skomentuj poniższe zdania (odpowiedź uzasadnij):

- warunek początkowy $x(5) = K + 1$ jest sensowny;
- nastąpi cofnięcie się choroby;
- pacjent ma szansę całkowicie wyzdrowieć (bez żadnej pomocy (na przykład medycznej) z zewnątrz);
- jedynym rozwiązaniem ograniczonym przy $t \to \infty$ jest $x(t) = K$;

34. Rozważmy równanie:

$$x'(t) = \frac{x(4 - x^2)}{x^4 + 9}.$$

Skomentuj poniższe zdania (odpowiedź uzasadnij):

- rozwiązaniem ograniczonym przy $t \to \infty$ jest $x(t) = 3$ i $x(t) = -3$;
- rozwiązań ograniczonych przy $t \to \infty$ jest więcej niż dwa (jesli tak to ile?);
- rozwiązań ograniczonych przy $t \to -\infty$ jest nieskończenie wiele;

35. Konieczność zaproponowania ekologicznie akceptowalnych strategii pozyskiwania plonów czy też odławiania wszelkich odnawialnych zasobów środowiska, jak zwierzęta, w szczególności ryby, rośliny, czy cokolwiek innego, nie podlega dyskusji.

Odławainie znajduje odzwierciedlenie we współczynniku śmiertelności, zatem jeśli nie jest nadmierne, populacja dostosowuje się i lokuje się w nowym stanie równowagi (który jest równoważny stałej liczbie osobników).

Niech $x(t)$ oznacza liczność populacji wielorybów w chwili t, oczywiście $x(t) \geqslant 0$. Rozważmy model, w którym śmiertelność jest zwiększona w wyniku odławiania:

$$x'(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - Ex(t),$$

gdzie $r, K, E > 0$ są ustalone i r jest wpółczynnikiem śmirtelności, K pojemnością środowiska, zaś E mierzy nakład pracy potrzebny do odławiania i tym samym $Ex(t)$ oznacza wydajność odławiania.

Przeanalizuj powyższy model (rozważając odpowiednie przypadki). Następnie, uzasadniając, odpowiedz na pytania:

- dla jakich watości r i E mamy jeden, a dla jakich dwa stany stacjonarne?

- kiedy odławiany gatunek wymiera (dla jakich parametrów)?
- kiedy odławiany gatunek będzie dążył do nowego stanu równawagi mniejszego od pojemności środowiska K?

36. Rozwiąż równanie

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u_t(x,0) = u(x,\pi) = 0 \\ u(0,t) = \cos\frac{7}{2}t, \quad u_x(0,t) = \cos\frac{11}{2}t \end{cases}$$

37. Rozwiąż równanie

$$\begin{cases} c^2 u_{tt} = u_{xx} \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \sin 5x, \quad u_t(x,0) = \sin 13x \end{cases}$$

38. Rozwiąż równanie falowe z warunkami Dirichleta i Neumana na brzegu odcinka $[0,l]$ i warunkiem początkowym:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x) \ , \ dla \ (x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \ , \ dla \ t \in [0,+\infty) \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \ , \ dla \ x \in (0,l) \end{cases}$$

39. Rozwiąż równanie przewodnictwa cieplnego z warunkiem Dirichleta na brzegu odcinka $[0,\pi]$ i warunkiem początkowym:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \ , \ dla \ (x,t) \in (0,\pi) \times (0,+\infty) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \ , \ dla \ t \in [0,+\infty) \\ u(x,0) = \phi(x) \ , \ dla \ x \in (0,\pi) \end{cases}$$

40. Rozwiąż równanie Laplace'a

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \ , \ dla \ (x,y) \in (0,p) \times (0,s) \\ u_x(0,y) = u_x(p,y) = 0 \ , \ dla \ y \in (0,s) \\ u(x,0) = A; \quad u(x,s) = Bx \ , \ dla \ x \in (0,p) \end{cases}$$

41. Rozwiąż równanie przewodnictwa cieplnego z warunkiem Dirichleta na brzegu odcinka $[0,1]$ i warunkiem początkowym:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \ , \ dla \ (x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \ , \ dla \ t \in [0,+\infty) \\ u(x,0) = x^3 - x \ , \ dla \ x \in (0,1) \end{cases}$$

42. Rozwiąż równanie przewodnictwa cieplnego z warunkiem Dirichleta na brzegu odcinka $[0,1]$ i warunkiem początkowym:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + 2 \ , \ dla \ (x,t) \in (0,\pi) \times (0,+\infty) \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \ , \ dla \ t \in [0,+\infty) \\ u(x,0) = 3 + \cos 4x \ , \ dla \ x \in (0,\pi) \end{cases}$$

43. Rozwiąż równanie

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \sin y \\ u_x\left(x, 0\right) = u\left(x, \pi\right) = 0 \\ u\left(0, y\right) = 2\sin 3y; \quad u\left(2\pi, y\right) = 0 \end{cases}$$

44. Rozwiąż równanie

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + 2\sin\frac{3\pi}{2l} \\ u(0, t) = u_x(l, t) = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$