Równania Różniczkowe, studia II stopnia

1. Niech X będzie przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $(\cdot \mid \cdot)$. Wraz z równaniem

$$x' = A(t)x, \tag{1}$$

gdzie $A : (a, b) \to L(X)$, rozważmy równanie

$$y' = -A(t)^* y \tag{2}$$

zwane równaniem sprzężonym do (1). $A(t)^*$ oznacza tu operator hermitowsko sprzężony do operatora $A(t)$, tzn.: $(A(t)x \mid y) = (x \mid A(t)^* y)$. Wykaż, że jeśli φ jest rozwiązaniem równania (1), a ψ jest rozwiązaniem równiania (2), to funkcja $t \to (\varphi(t) \mid \psi(t))$ jest stała.

2. Znajdź rezolwentę równania $x' = tx$, $x \in \mathbb{R}$.

3. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania:

$$\begin{cases} x' = -y + z + 1 \\ y' = z \\ z' = -x + z \end{cases}$$

4. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania:

$$\begin{cases} x' = 5x - y - 4z \\ y' = -12x + 5y + 12z \\ z' = 10x - 3y - 9z + 1 \end{cases}$$

5. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania:

$$\begin{cases} x' = 2x + y + 1 \\ y' = x + 3y - z \\ z' = -x + 2y + 3z \end{cases}$$

6. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania:

$$\begin{cases} x' = 2x + y + 3z \\ y' = 2y - z \\ z' = 2z \end{cases}$$

7. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania:

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

8. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $(1 - t^2)x'' - tx' + \frac{1}{4}x = 0$ wiedząc, że jego rozwiązaniem jest funkcja $\varphi(t) = \sqrt{t + 1}$.

9. Rozwiązać równanie $(t-1)x'' - (t+1)x' + 2x = 0$, (wsk.: jednym z jego rozwiązań jest wielomian).

10. Rozwiąż równanie: $(t+1)^2x'' - 2(t+1)x' + 2x = 0$, (wsk.: zastosować podstawienie $t+1 = e^s$).

11. Rozważmy zagadnienie początkowe na $\mathbb{R}$ postaci $x' = 0$, $x(0) = x_0$. Narysuj kilka przykładowych rozwiązań. Dla podanego równania rozważ odpowiedni układ dynamiczny i narysuj jego portret fazowy.

12. Rozważmy zagadnienie początkowe na $\mathbb{R}$ postaci $x' = 1$, $x(0) = x_0$. Narysuj kilka przykładowych rozwiązań. Dla podanego równania rozważ odpowiedni układ dynamiczny i narysuj jego portret fazowy.

13. Rozważmy zagadnienie początkowe na $\mathbb{R}$ postaci $x' = x$, $x(0) = x_0$. Narysuj kilka przykładowych rozwiązań. Dla podanego równania rozważ odpowiedni układ dynamiczny i narysuj jego portret fazowy.

14. Rozważmy zagadnienie początkowe na $\mathbb{R}$ postaci $x' = 1 - x$, $x(0) = x_0$. Narysuj kilka przykładowych rozwiązań. Dla podanego równania rozważ odpowiedni układ dynamiczny i narysuj jego portret fazowy.

15. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y, \end{cases}$$

$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$, $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$. Narysuj kilka przykładowych rozwiązań. Dla podanego układu równańk rozważ odpowiedni układ dynamiczny i narysuj jego portret fazowy.

16. Narysuj portret fazowy układu (zamienić na współrzędne biegunowe)

$$\begin{cases} x' = x - y - x\sqrt{x^2+y^2} \\ y' = x + y - y\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}.$$

17. Narysować portrety fazowe układów:

- $x'' = -3x^2 - 2x$;
- $x'' = -4x^3 + 18x^2 - 22x + 6$;
- $x'' = \frac{2x}{x^2+1}$;
- $x'' + \sin x = 0$ (równanie wahadła);
- $x'' + bx + \sin x = 0$ (równanie wahadła z tłumieniem);
- $x'' + x = \alpha + \varepsilon x^2$ (równanie ruchu planet Einsteina).

18. Dokonać klasyfikacji punktu krytycznego $(0,0)$ w podanych poniżej układach. Następnie narysować portret fazowy w zmiennych kanoniczych i wyjściowych (wsk: dla wyznaczonych wartości własnych znaleźć odpowiadające im wektory własne).

- $$\begin{cases} x' = 3x + 4y \\ y' = 2x + y; \end{cases}$$

- $$\begin{cases} x' = y \\ y' = y - 2x; \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x' = -2x - 5y \\ y' = 2x + 2y; \end{cases}$$

19. W poniższych układach równań znaleźć punkty krytyczne, dokonać ich klasyfikacji oraz naszkicować lokalne portrety fazowe.

- $$\begin{cases} x' = (2x - y)(x - 2) \\ y' = xy - 2; \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x^2 + y^2 - 2; \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x' = \ln \frac{y^2 - y + 1}{3} \\ y' = x^2 - y^2; \end{cases}$$

20. Dokonać klasyfikacji punktów krytycznych układu:

$$\begin{cases} x' = \sin x \\ y' = -\sin y. \end{cases}$$

21. Zbadać portrety fazowe układów: po pierwsze dokonując linearyzacji, po drugie przechodząc na współrzędne biegunowe. Omówić otrzymane wyniki.

- $$\begin{cases} x' = -y + x(x^2 + y^2) \\ y' = x + y(x^2 + y^2); \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x' = -y - x(x^2 + y^2) \\ y' = x - y(x^2 + y^2); \end{cases}$$

22. Sklasyfikować punkt krytyczny $(0, 0)$ linearyzując układ oraz przechodząc do współrzędnych biegunowych. Jakie możemy wyciągnąć wnioski?

$$\begin{cases} x' = x + \frac{y}{\ln \sqrt{x^2 + y^2}} \\ x' = y + \frac{x}{\ln \sqrt{x^2 + y^2}}; \end{cases}$$

23. Zbadać stabilność lub brak stabilności rozwiązania zerowego układów równań (twierdzenia Lapunowa):

$$\begin{cases} x_1' = x_1^3 - x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 - x_1 + x_1 x_2 \\ x_2' = x_1 - x_2 - x_1^2 - x_2^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -x^3y^2 \\ y' = -x^4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1^5 + x_2^3 \\ x_2' = x_1^3 - x_2^5 \end{cases}$$

24. Dla równania $x'' + (x^2 + (x')^2 + 1)x' + 4x = 0$ w $\mathbb{R}^2$ znaleźć funkcję Lapunowa i zbadać stabilność rozwiązania zerowego.

25. Znaleźć całki pierwsze dla układów równań:

$$\begin{cases} x_1' = \frac{x_1}{2x_1 - x_2} \\ x_2' = \frac{x_2}{2x_1 - x_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x(y-z) \\ y' = y(z-x) \\ z' = z(x-y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = x_3 - x_2 \\ x_2' = x_1 - x_3 \\ x_3' = x_2 - x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = \frac{z}{(z-y)^2} \\ z' = \frac{y}{(z-y)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 + e^t \\ x_2' = -x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} - x_1 - tx_2 \\ x_2' = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} - x_2 + tx_1 \end{cases}$$

26. Zapisać następujące zagadnienie brzegowe

$$\begin{cases} v''(t) = -g(t, v(t), \quad t \in [0,1] \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases}$$

w równoważnej postaci całkowej.

27. Rozwiązać równanie

- $xu_x + 2yu_y + 3zu_z = 0$;
- $(z-y)u_x + (x-z)u_y + (y-x)u_z = 0$;
- $(x+u)u_x + (y+u)u_y = 0$;

28. Rozwiązać zagadnienie początkowe

- $xu_x + y^2u_y = u$, $u(x,0) = 1$;
- $yu_x + xu_y - zu_z = 0$, $u(t, t^2, -t) = 2t$;
- $u_x - (y+2z)u_y + (3y+4z)u_z = 0$, $u(t, 2t, 3t) = t^2$;

- $x(y-u)u_x + y(u-x)u_y = u(x-y)$, $u(x,1) = 2$;
- $yzz_x + xz_y = 0$, $z(x,1) = x^2$;
- $\cos y u_x + \cos x u_y = \cos x \cos y$, $u(\pi, y) = \sin^2 y$;
- $u_x + \frac{1}{2}u_y = u^2$, $u(x,x) = 1/x$;
- $xu_x + yu_y = y$, $u(1,y) = -y$;

29. Jakiego typu jest równanie

    - $(x-y)u_{xx} + 2u_{xy} - (x^2+y^2)u_{yy} = 2u_x - 3xu_y + u + x$;
    - $u_x x + yu_y y + zu_z z + xu_y z = 0$;

    w różnych punktach płaszczyzny?

30. Następujące równania sprowadzić do postaci kanonicznej:

    - $y^4 u_{xx} + 2xy^2 u_{xy} + x^2 u_{yy} - y^2 u_y = 0$;
    - $9y^4 u_{xx} - 6y^2 u_{xy} + 2u_{yy} - 6u_y = 0$;
    - $u_{xx} + 4\cos 2x u_{xy} - 4\sin^2 2x u_{yy} - 4\sin 2x u_y = 0$;