

XV Ogólnopolski Konkurs Matematyczny "W Świecie Matematyki"
im. Prof. Włodzimierza Krywickiego
Etap pierwszy - 8 marca 2024 r.

Maksymalna liczba punktów do zdobycia: 50.

1. Pierwszy etap Konkursu składa się z 20 pytań testowych.
2. Każde z zadań 1-10 składa się z trzech niezależnych od siebie podpunktów. Każde z zadań 11-20 składa się z czterech niezależnych od siebie podpunktów. Do każdego z podpunktów należy udzielić odpowiedzi **TAK** (gdy potwierdzamy prawdziwość rozpatrywanego zdania) lub **NIE** (gdy uznajemy rozpatrywane zdanie za fałszywe), bądź pozostawić pole puste (jeśli nie chcemy odpowiadać na dany podpunkt). Po zakończeniu wypełniania testu, należy nanieść odpowiedzi w **KARCIE ODPOWIEDZI**. Punktacja za każde zadanie jest następująca:
 - **0 punktów** w przypadku udzielenia co najmniej jednej błędnej odpowiedzi na jeden z podpunktów zadania lub nieudzielenia odpowiedzi na żaden z podpunktów zadania;
 - **$n - 1$ punktów** w przypadku, gdy udzieli się poprawnych odpowiedzi na n podpunktów w zadaniu i nie udzieli się żadnej błędnej odpowiedzi na którykolwiek z podpunktów w zadaniu.
3. Zabrania się korzystania z korektora. W przypadku pomyłki w teście odpowiedź należy przekreślić, zaś nową odpowiedź zaznaczyć po lewej stronie miejsca przeznaczonego na odpowiedź.
4. Dozwolone jest korzystanie z "Zestawu wybranych wzorów matematycznych" i kalkulatorów.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielnej pracy uczestnika Konkursu zostaje on wykluczony z Konkursu.

Oznaczenia i definicje

Symbolem \mathbb{R} oznaczamy zbiór liczb rzeczywistych.

Symbolem \mathbb{R}_+ oznaczamy zbiór dodatnich liczb rzeczywistych.

Symbolem \mathbb{Q} oznaczamy zbiór liczb wymiernych.

Symbolem \mathbb{Z} oznaczamy zbiór liczb całkowitych.

Symbolem \mathbb{N} oznaczamy zbiór liczb naturalnych. Przyjmujemy, że 0 nie jest liczbą naturalną.

Symbolem \mathbb{N}_0 oznaczamy zbiór $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Symbolem \mathbf{P} oznaczamy zbiór liczb pierwszych.

Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. **Obrazem** zbioru $A \subset \mathbb{R}$ nazywamy zbiór

$$f[A] := \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in A\},$$

natomiast **przeciwoobrazem** zbioru $B \subset \mathbb{R}$ nazywamy zbiór

$$f^{-1}[B] := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in B\}.$$

Dla dowolnych zbiorów A, B **produktem kartezjańskim** zbiorów A i B nazywamy zbiór

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Ponadto $X \times X =: X^2$

Zbiorem potęgowym $\mathcal{P}(X)$ zbioru X nazywamy zbiór, który zawiera wszystkie podzbiory zbioru X .

Dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ niech $\sum_{i=1}^n a_i := a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

Powiemy, że ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest **ograniczony**, jeśli istnieje taka liczba $M \in \mathbb{R}$, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $|a_n| \leq M$. Powiemy, że ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest **nieograniczony**, jeśli nie jest ograniczony.

Zadanie 1. Oceń czy dla dowolnej funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prawdziwe jest zdanie:

- [] Jeśli istnieje takie $a \in \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ $f(x+a) = f(x)$, to funkcja f jest stała;
- [] Jeśli dla każdego $a \in \mathbb{Q}$ i każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f(x+a) = f(x)$, to funkcja f jest stała;
- [] Jeśli dla każdego $a \in \mathbb{R}$ i każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f(x+a) = f(x)$, to funkcja f jest stała.

Zadanie 2. Dla $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ definiujemy funkcję $f_{a_0, \dots, a_n}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem $f_{a_0, \dots, a_n}(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Oceń prawdziwość zdań:

- [] Dla takiego $n \in \mathbb{N}$, oraz $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, że f_{a_0, \dots, a_n} ma n różnych miejsc zerowych, ich iloczyn wynosi $\frac{a_0}{a_n}$;
- [] Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieją takie $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, że $f_{a_0, \dots, a_n}(a_0) = 0$;
- [] Niech f_{a_0, \dots, a_n} ma n różnych miejsc zerowych. Wtedy suma miejsc zerowych tej funkcji wynosi 0 wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{n-1} = 0$.

Zadanie 3. Powiemy, że dwie funkcje $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ są do siebie styczne w punkcie a , jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taka $\delta > 0$, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$, jeśli $|x - a| < \delta$, to $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon |x - a|$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań:

- [] $f(x) = \sin x$ oraz $g(x) = x$ są do siebie styczne w $a = 0$.
- [] Dwie funkcje styczne w punkcie a mogą przyjmować w tym punkcie różne wartości.
- [] Niech funkcje f i g będą do siebie styczne w punkcie a . Wówczas f jest ciągła w a wtedy i tylko wtedy, gdy g jest ciągła w a .

Zadanie 4. Oceń prawdziwość podanych zdań:

- [] Funkcja kwadratowa i funkcja wielomianowa 3-go stopnia mogą być sobie równe w dokładnie dwóch miejscach.
- [] Niech f i g będą pewnymi funkcjami kwadratowymi. Wówczas f i g mogą przyjmować te same wartości w trzech miejscach.
- [] Jeśli dwie funkcje ciągłe przyjmują taką samą wartość w nieskończenie wielu miejscach to muszą być sobie równe.

Zadanie 5. Oceń czy dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ liczb rzeczywistych zbieżnego do pewnego $x \in \mathbb{R}$ oraz dowolnej funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prawdziwe są zdania:

- [] Ciąg $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny.
- [] Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$, dla pewnego $g \in \mathbb{R}$, to f jest ciągła w x .
- [] Jeśli f jest ciągła, to ciąg $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ jest ograniczony.

Zadanie 6. *Otoczką wypukłą* podzbioru przestrzeni \mathbb{R}^3 nazywamy najmniejszy (względem zawierania) zbiór wypukły, tj. taki, że odcinek o końcach w tym zbiorze zawiera się całkowicie w tym zbiorze, który zawiera dany podzbiór. Niech $\text{conv}(X)$ oznacza otoczkę wypukłą zbioru $X \subset \mathbb{R}^3$. Oceń prawdziwość poniższych zdań:

- [] Jeśli $X \subseteq Y$ to $\text{conv}(X) \subseteq \text{conv}(Y)$.
- [] Otoczką wypukłą czterech punktów w \mathbb{R}^3 jest czworościanem.
- [] Niech $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^3$ będą kulami o promieniu 1, o środkach w punktach odpowiednio $(-1, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$. Wtedy objętość $\text{conv}(K_1 \cup K_2)$ wynosi $\frac{8}{3}\pi$.

Zadanie 7. Dwustosunkiem układu punktów (A, B, C, D) leżących na jednej prostej nazywamy liczbę:

$$(A, B; C, D) := \frac{|AC|}{|BC|} : \frac{|AD|}{|BD|}$$

Oceń prawdziwość poniższych zdań:

- [] $(0, 2; 3, 6) = 2$.
- [] Dany jest punkt P oraz prosta l niezawierająca punktu P . Punkty A, B, C, D leżą na prostej l . Prosta k różna od l i równoległa do niej niezawierająca punktu P przecina proste PA, PB, PC, PD w punktach odpowiednio A', B', C', D' . Wtedy $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$.
- [] Dany jest punkt P oraz prosta l niezawierająca punktu P . Punkty A, B, C, D leżą na prostej l . Prosta k różna od l niezawierająca punktu P przecina proste PA, PB, PC, PD w punktach odpowiednio A', B', C', D' . Wtedy $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$.

Zadanie 8. Niech $\Omega \neq \emptyset$ będzie zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych pewnego doświadczenia losowego, natomiast \mathbb{P} prawdopodobieństwem określonym na podzbiorach zbioru Ω . Oceń prawdziwość poniższych zdań:

- [] Dla dowolnych zdarzeń A, B jeśli $\mathbb{P}(A) > 0$ oraz $\mathbb{P}(B) > 0$, to $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(B)}$.
- [] Dla dowolnych zdarzeń A, B jeśli $\mathbb{P}(A) \in (0, 1)$, to $\mathbb{P}(A'|A) = 1$, gdzie A' to zdarzenie przeciwne do A .
- [] Dla dowolnych zdarzeń A, B zachodzi $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$.

Zadanie 9. Niech Ω, \mathbb{P} będą jak w zadaniu 8, oraz dla pewnych zdarzeń A, B, C

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(A|A \cup B) = \frac{2}{3}, \mathbb{P}(C|A \cap B) = \frac{1}{3}, \mathbb{P}(A \cap C') = \frac{3}{8}.$$

Oceń prawdziwość zdań:

[] $\mathbb{P}(B|A \cap C) = \frac{2}{21}$

[] $\mathbb{P}(A \setminus C) = \frac{3}{8}$

[] $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{2}{3}$

Zadanie 10. Niech $\text{mex} : \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \setminus \{\mathbb{N}_0\} \rightarrow \mathbb{N}_0$ będzie funkcją przyporządkowującą danemu podzbirowi $X \subset \mathbb{N}_0$ najmniejszą liczbę naturalną (z zerem), która **nie** należy do X , np. $\text{mex}(\{0, 1, 2, 3, 5\}) = 4$, $\text{mex}(\emptyset) = 0$.

[] Niech $X = \{x \in \mathbb{N}_0 : 2|x \vee 3|x\} \cup \{1\}$. Wtedy $\text{mex}(X) = 4$.

[] Istnieją takie zbiory $X, Y \subset \mathbb{N}_0$, $X \cup Y \neq \mathbb{N}_0$, że:

$$\text{mex}(X \cup Y) < \max\{\text{mex}(X), \text{mex}(Y)\}.$$

[] Dla dowolnego $X \subset \mathbb{N}_0$, $X \neq \mathbb{N}_0$ jeśli $0 \in X$ to $\text{mex}(\{\text{mex}(X)\}) < \text{mex}(X)$.

Zadanie 11. Dla dowolnej funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i zbiorów $A, B \subset \mathbb{R}$ zachodzi warunek:

[] $f[f^{-1}[B]] = B$;

[] $f^{-1}[f[A]] = A$;

[] $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$;

[] $f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B]$.

Zadanie 12. Oceń czy prawdziwe są zdania.

[] Dla dowolnych niepustych zbiorów A, B , $A \times B = B \times A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A = B$.

[] Dla dowolnych zbiorów A, B, C, D jeśli $A \subset C$ oraz $B \subset D$, to $A \times B \subset C \times D$.

[] Dla dowolnych zbiorów A, B, C mamy $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

[] $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} = A \times B$ dla pewnych $A, B \subset \mathbb{R}$.

Zadanie 13. Niech $\mathcal{A} = \{A_t : t \in T\}$ będzie zindeksowaną rodziną zbiorów. Suma i część wspólna rodziny \mathcal{A} to zbiory:

$$\bigcup \mathcal{A} := \bigcup_{t \in T} A_t = \{x : x \in A_t \text{ dla pewnego } t \in T\}$$

$$\bigcap \mathcal{A} := \bigcap_{t \in T} A_t = \{x : x \in A_t \text{ dla każdego } t \in T\}$$

Określ prawdziwość zdań.

[] Jeśli $A_p = \{pn : n \in \mathbb{N} \wedge n > 1\}$ dla $p \in \mathbf{P}$ to $\bigcup_{p \in \mathbf{P}} A_p = \mathbb{N} \setminus \{1\}$

[] Jeśli $A_t = (-t, t + 1)$ dla $t \in \mathbb{R}_+$ to $\bigcap_{t \in \mathbb{R}_+} A_t = [0, 1]$

[] Jeśli $A_k = \{\frac{k}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ dla $k \in \mathbb{Z}$ to $\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} A_k = \mathbb{Q}$

[] Jeśli $A_n = \{\frac{k}{n} : k \in \mathbb{Z}\}$ dla $n \in \mathbb{N}$ to $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{Q}$

Zadanie 14. Niech $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Mówimy, że liczba $M \in \mathbb{R}$ jest kresem górnym zbioru A , jeśli spełnione są następujące warunki:

- $a \leq M$ dla wszystkich $a \in A$;
- dla dowolnej liczby $r < M$ istnieje element $a \in A$ spełniający nierówność $r < a$.

Kres górny zbioru A (jeśli istnieje) oznaczamy symbolem $\sup A$.

Jeśli $-m$ jest kresem górnym zbioru $-A := \{-a : a \in A\}$, to mówimy, że liczba m jest kresem dolnym zbioru A , co zapisujemy $\inf A = m$.

Oceń prawdziwość zdań.

[] Dla zbioru $A = \{n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$, $\sup A$ nie istnieje i $\inf A = 0$;

[] Dla zbioru $B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, $\sup B = 1$ i $\inf B$ nie istnieje;

[] Dla każdego zbioru $D_n = \{\frac{nk}{k+1} : k \in \mathbb{N}\}$, $n \in \mathbb{N}$, $\sup D_n$ i $\inf D_n$ nie istnieją;

[] Dla zbioru $D = \{\frac{nk}{k+1} : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$, $\sup D$ i $\inf D$ nie istnieją.

Zadanie 15. Metryką na zbiorze $X \neq \emptyset$ nazwiemy dowolną funkcję $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$, która spełnia poniższe warunki:

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$ dla dowolnych $x, y \in X$,
- $d(x, y) = d(y, x)$ dla dowolnych $x, y \in X$,
- $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ dla dowolnych $x, y, z \in X$.

Ponadto niech $d_e(x, y)$ oznacza zwykłą odległość dwóch punktów na płaszczyźnie (d_e jest metryką). Oceń, czy podane funkcje są metrykami na X :

[] $X = \mathbb{R}^2$,

$$d(x, y) := \begin{cases} d_e(x, y) & , \text{ jeśli } x, y \text{ i } (0, 0) \text{ leżą na jednej prostej} \\ d_e(x, 0) + d_e(0, y) & \text{ w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

[] X - skończone podzbiory liczb naturalnych, dla $x, y \in X$ niech $d(x, y) := |(x \setminus y) \cup (y \setminus x)|$

[] X - zbiór siedmioliterowych słów w języku polskim, dla $x, y \in X$ niech $d(x, y) :=$ liczba liter na odpowiadających sobie miejscach w tej parze słów, które są od siebie różne.

[] $X = \mathbb{R}^2$, dla $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X$ niech $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := |x_1 - x_2|$.

Zadanie 16. Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktów płaszczyzny \mathbb{R}^2 jest **zbieżny do punktu** $x \in \mathbb{R}^2$, jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $N \in \mathbb{N}$, że dla $n \geq N$ spełniona jest nierówność

$$d_e(a_n, x) < \varepsilon,$$

gdzie d_e to metryka zdefiniowana w zadaniu 15. Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest **rozbieżny**, jeśli nie jest zbieżny.

Oceń prawdziwość zdań.

[] Jeśli ciągi liczb rzeczywistych $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ są zbieżne, odpowiednio, do $a, b \in \mathbb{R}$, to ciąg $((a_n, b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do punktu (a, b) .

[] Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ o wyrazie ogólnym $a_n = (\sin(\frac{n\pi}{2}), \frac{1}{n})$ jest zbieżny.

[] Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będą ciągami liczb rzeczywistych. Jeśli ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny, natomiast $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest rozbieżny, to ciąg $((a_n, b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ jest rozbieżny.

[] Niech $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset, f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi. Jeśli ciągi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ są zbieżne, to ciąg $(f(a_n), g(b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny.

Zadanie 17. Oceń prawdziwość zdań dotyczących ciągów liczb rzeczywistych.

- [] Ciąg, którego wyrazy są na przemian dodatnie i ujemne jest rozbieżny.
- [] Dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbieżnego do zera i ciągu liczb rzeczywistych $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ciąg $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie $z_i = y_i \cdot x_i$ dla $i \in \mathbb{N}$, jest zbieżny.
- [] Jeśli istnieje taka liczba $N \in \mathbb{N}$, że dla dowolnych $n, m > N$ wyrazy ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ spełniają nierówność $|x_n - x_m| < 10^{-24}$ to ciąg ten jest zbieżny.
- [] Jeśli istnieje taka liczba $N \in \mathbb{N}$, że dla dowolnych $n, m > N$ wyrazy ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ spełniają nierówność $|x_n - x_m| < 10^{24}$ to ciąg ten jest ograniczony.

Zadanie 18. Dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_{2024}$ prawdziwe są zdania:

- [] $\sum_{i=1}^{2024} \ln(x_i) < \sum_{i=1}^{2024} x_i.$
- [] $\sum_{i=1}^{2024} \ln(x_i) < \ln \left(\sum_{i=1}^{2024} x_i \right).$
- [] $\sum_{i=1}^{2024} |\ln(x_i)| < \sum_{i=1}^{2024} x_i.$
- [] $\left| \sum_{i=1}^{2024} \ln(x_i) \right| < \sum_{i=1}^{2024} x_i.$

Zadanie 19. Oceń prawdziwość podanych zdań:

- [] Równanie $3^n = n^2$ nie ma rozwiązań w zbiorze liczb naturalnych.
- [] Równanie $3^{2n} + n^3 = 2025n^2$ ma rozwiązanie w zbiorze liczb naturalnych.
- [] Równanie $x^3 + y^3 = 9z^4 + 5$ ma rozwiązanie w zbiorze liczb całkowitych.
- [] Równanie $x^3 + y^3 = 7z^2 + 3$ ma rozwiązanie w zbiorze liczb całkowitych.

Zadanie 20. Silnię podwójną definiujemy następująco:

$$n!! := \begin{cases} n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2 & \text{dla } n \text{ parzystych, } n > 1; \\ n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych, } n > 1; \\ 1 & \text{dla } n = 0, 1. \end{cases}$$

- [] Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, $(k!)!! = (k!!)!$.
- [] Dowolną liczbę postaci $k!$ można przedstawić jako iloczyn dwóch podwójnych silni.
- [] Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, $(2k)!! = 2^k \cdot k!$.
- [] Dla dowolnej liczby pierwszej p liczba $(p^2)!!$ jest nieparzysta.

KARTA ODPOWIEDZI

XV Ogólnopolski Konkurs Matematyczny "W Świecie Matematyki"

im. Prof. Włodzimierza Krywickiego

Etap pierwszy - 8 marca 2024 r.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20