

## ZADANIE NR

**Definicja 1.** Gdy  $X$  jest zbiorem niepustym to funkcję  $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$  nazywamy *metryką*, jeśli spełnione są warunki:

$$\begin{aligned} \forall_{x,y \in X} \quad & (d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y); \\ \forall_{x,y \in X} \quad & d(x,y) = d(y,x); \\ \forall_{x,y,z \in X} \quad & d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

Wtedy parę  $(X, d)$  nazywamy przestrzenią metryczną.

Metryka jest uogólnieniem pojęcia odległości. W szczególności można sprawdzić, że metrykami są funkcje:

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &:= |x - y| \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}; \\ d_2(P_1, P_2) &:= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad \text{dla } P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2; \\ d_3(P_1, P_2) &:= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \quad \text{dla } P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

gdzie dla  $i = 1, 2$ ,  $P_i := (x_i, y_i)$ .  $d_1$  i  $d_2$  to tzw. metryki euklidesowe opisujące naturalne odległości, jakich używamy na prostej i płaszczyźnie. Z kolei  $d_3$  to tzw. metryka taksówkowa – odległość, której używamy w mieście poruszając się samochodem (zakładamy, nieco upraszczając, że ulice biegną tylko w kierunkach północ-południe i wschód-zachód oraz są dwukierunkowe).

Ważnym twierdzeniem w teorii przestrzeni metrycznych jest tzw. zasada odwzorowań zwężających odkryta przez Stefana Banacha w 1922 r. Przed jej sformułowaniem podamy dwie definicje.

**Definicja 2.** Gdy  $X \neq \emptyset$  i  $f: X \rightarrow X$  to ciąg  $(f^n)$  określony niżej nazywamy ciągiem kolejnych *iterat* funkcji  $f$ : dla dowolnego  $x \in X$ ,

$$f^1(x) := f(x) \quad \text{i} \quad f^{n+1}(x) := f(f^n(x)) \quad \text{dla dowolnego } n \in \mathbb{N}.$$

W szczególności  $f^2(x) = f(f(x))$ ,  $f^3(x) = f(f^2(x)) = f(f(f(x)))$  itd.

**Definicja 3.** Gdy  $(X, d)$  jest przestrzenią metryczną to funkcję  $f: X \rightarrow X$  nazywamy *odwzorowaniem zwężającym*, jeśli

$$\exists_{c \in [0,1)} \quad \forall_{x,y \in X} \quad d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y).$$

**Twierdzenie 1** (Banach). *Załóżmy, że  $(X, d)$  jest przestrzenią metryczną zupełną i  $f: X \rightarrow X$  jest odwzorowaniem zwężającym ze stałą zwężania  $c$ . Wówczas istnieje dokładnie jeden taki punkt  $x_* \in X$ , że  $x_* = f(x_*)$ . Ponadto dla dowolnego  $x_0 \in X$ ,*

$$d(f^n(x_0), x_*) \leq \frac{c^n}{1-c} d(x_0, f(x_0)),$$

*a stąd ciąg  $(f^n(x_0))$  jest zbieżny do  $x_*$ .*

Pomijamy definicję zupełności i przyjmujemy do wiadomości, że przestrzenie  $(\mathbb{R}, d_1)$ ,  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  i  $(\mathbb{R}^2, d_3)$  są zupełne.

### Zadania do wykonania

(a) Korzystając z twierdzenia 1 udowodnij, że równanie

$$x = \frac{2}{x^2 + 4}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie w  $\mathbb{R}$  i wyznacz jego przybliżoną wartość z dokładnością do 0,05.

(b) Wykaż z pomocą twierdzenia 1, że układ równań

$$\begin{cases} 2x - y - \sin x &= 4 \\ -x + 3y - \cos y &= 5 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie w  $\mathbb{R}^2$ .

**Wskazówka.** Zapisz układ w postaci  $(x, y) = F(x, y)$ , gdzie  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  jest odpowiednio zdefiniowaną funkcją, a następnie zastosuj twierdzenie 1 rozważając  $F$  na przestrzeni metrycznej  $(\mathbb{R}^2, d_3)$ .

### Rozwiązanie części (a)

Niech  $f(x) := \frac{2}{x^2+4}$  dla  $x \in \mathbb{R}$ . Pokażemy, że  $f$  jest odwzorowaniem zwężającym. Niech  $x, y \in \mathbb{R}$ . Wówczas

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{2}{x^2+4} - \frac{2}{y^2+4} \right| = 2 \frac{|y^2-x^2|}{(x^2+4)(y^2+4)} \leq \frac{1}{2} |x-y| \frac{4|x|+4|y|}{(x^2+4)(y^2+4)} \\ &= \frac{1}{2} |x-y| \left( \frac{2 \cdot 2|x|}{x^2+2^2} \frac{1}{y^2+4} + \frac{2 \cdot 2|y|}{y^2+2^2} \frac{1}{x^2+4} \right) \leq \frac{1}{2} |x-y| \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} |x-y|. \end{aligned}$$

(Skorzystaliśmy tu z nierówności  $\frac{2ab}{a^2+b^2} \leq 1$ , gdy  $a \neq 0$  lub  $b \neq 0$ .) Możemy więc przyjąć  $c = \frac{1}{4}$ . Z tw. 1  $f$  ma dokładnie jeden punkt stały  $x_*$  i biorąc  $x_0 := 0$  dostajemy, że

$$|f^2(0) - x_*| \leq \frac{c^2}{1-c} |0 - f(0)| = \frac{1}{16} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24} < 0,05.$$

$f^2(0) = f(\frac{1}{2}) = \frac{8}{17}$ , więc przybliżona wartość rozwiązania z dokładnością do 0,05 wynosi  $\frac{8}{17}$ .

### Rozwiązanie części (b)

Powyższy układ równań możemy zapisać w postaci:

$$\begin{cases} x &= \frac{\sin x}{2} + \frac{y}{2} + 2 \\ y &= \frac{x}{3} + \frac{\cos y}{3} + \frac{5}{3}. \end{cases}$$

Dla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  niech

$$F(x, y) := \left( \frac{\sin x}{2} + \frac{y}{2} + 2, \frac{x}{3} + \frac{\cos y}{3} + \frac{5}{3} \right).$$

Wtedy punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  jest rozwiązaniem naszego układu równań wtedy i tylko wtedy, gdy  $(x, y) = F(x, y)$ . Na mocy tw. 1 wystarczy więc pokazać, że  $F$  jest odwzorowaniem zwężającym. Dla  $i = 1, 2$  niech  $P_i := (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ . Wówczas

$$\begin{aligned} d_3(F(P_1), F(P_2)) &= \frac{1}{2} |\sin x_1 - \sin x_2 + y_1 - y_2| + \frac{1}{3} |x_1 - x_2 + \cos y_1 - \cos y_2| \\ &\leq \frac{1}{2} |\sin x_1 - \sin x_2| + \frac{1}{2} |y_1 - y_2| + \frac{1}{3} |x_1 - x_2| + \frac{1}{3} |\cos y_1 - \cos y_2|. \end{aligned}$$

Korzystając ze wzorów trygonometrycznych i z nierówności  $|\sin \alpha| \leq |\alpha|$  otrzymujemy:

$$|\sin x_1 - \sin x_2| = 2 \left| \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \right| \leq |x_1 - x_2|.$$

Podobnie pokazujemy, że  $|\cos y_1 - \cos y_2| \leq |y_1 - y_2|$ . W konsekwencji

$$d_3(F(P_1), F(P_2)) \leq \frac{1}{2} |x_1 - x_2| + \frac{1}{2} |y_1 - y_2| + \frac{1}{3} |x_1 - x_2| + \frac{1}{3} |y_1 - y_2| = \frac{5}{6} (|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) = \frac{5}{6} \cdot d_3(P_1, P_2),$$

więc  $F$  jest odwzorowaniem zwężającym.