

### Zadanie 3 (a)

Mamy znaleźć wartość sumy:

$$S = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n,$$

gdzie  $(a_n)$  jest ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie  $a_1$  i różnicy  $r$ .

Wyraz ogólny ciągu arytmetycznego można wyrazić jako:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r.$$

Podstawiając  $a_n$  do sumy  $S$ , otrzymujemy:

$$S = a_1 \cdot 1 + (a_1 + r) \cdot 2 + (a_1 + 2r) \cdot 3 + \cdots + (a_1 + (n - 1)r) \cdot n.$$

Rozbijmy teraz sumę  $S$  na dwie części:

$$S = a_1(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + r(1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \cdots + n \cdot n).$$

**Obliczenie pierwszej sumy:**

Pierwsza suma to suma liczb od 1 do  $n$ :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Obliczenie drugiej sumy:**

Druga suma to suma kwadratów liczb od 1 do  $n$ :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**Końcowa formuła:**

Podstawiając te sumy do wzoru na  $S$ , otrzymujemy:

$$S = a_1 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + r \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Możemy wyłączyć wspólny czynnik  $\frac{n(n+1)}{2}$ :

$$S = \frac{n(n+1)}{2} \left( a_1 + \frac{r(2n+1)}{3} \right).$$

### Zadanie 3 (b)

Niech  $(a_n)$  będzie dowolnym ciągiem. Zdefiniujmy ciąg  $(b_n)$  jako:

$$b_n = a_{n+2} - a_n \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Mamy obliczyć sumę:

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n.$$

Podstawiając definicję  $b_n$ , otrzymujemy:

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = (a_3 - a_1) + (a_4 - a_2) + (a_5 - a_3) + \dots + (a_{n+2} - a_n).$$

Po rozpisaniu widzimy, że wszystkie wyrazy pośrednie się redukują, co daje:

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = a_{n+2} - a_1.$$

Ostatecznie:

$$\sum_{k=1}^n b_k = a_{n+2} - a_1.$$

### Zadanie 3(b) - część druga

Obliczmy sumę

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+2)}.$$

Zauważmy, że każdy wyraz tej sumy możemy zapisać jako:

$$\frac{1}{k \cdot (k+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right).$$

Zatem suma przyjmuje postać:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot (k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right).$$

Po rozpisaniu tej sumy zauważymy, że jest to tzw. "suma teleskopowa", w której większość wyrazów się redukuje:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right).$$

Pozostają tylko pierwsze i ostatnie wyrazy, więc otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right).$$

Ostateczna wartość sumy to:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot (k+2)} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right).$$