

ZADANIE NR 2

Wyznacz wszystkie $t \in \mathbb{R}$, dla których równanie

$$x^4 - 15x^3 + 70x^2 - 120x + t = 0$$

zmiennej rzeczywistej x ma cztery rzeczywiste pierwiastki będące kolejnymi wyrazami pewnego ciągu geometrycznego. Dla wyznaczonych t znajdź pierwiastki danego równania.

Rozwiązanie. Weźmy dowolne $t \in \mathbb{R}$. Niech x_1, x_2, x_3, x_4 będą pierwiastkami równania

$$x^4 - 15x^3 + 70x^2 - 120x + t = 0 \quad (1)$$

będącymi kolejnymi wyrazami pewnego ciągu geometrycznego. Zatem $x_2 = x_1q$, $x_3 = x_1q^2$, $x_4 = x_1q^3$ dla pewnego rzeczywistego q . W szczególności:

$$x_2x_3 = x_1x_4. \quad (2)$$

Ze wzorów Viète'a dla wielomianów stopnia czwartego wynika, że:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 15, \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_4 &= 70, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 &= 120, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 &= t. \end{aligned}$$

Stąd oraz z (2) otrzymujemy, że:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_4) + (x_2 + x_3) &= 15, \\ (x_1 + x_4)(x_2 + x_3) + 2x_1x_4 &= 70, \\ x_1x_4(x_1 + x_4) + x_1x_4(x_2 + x_3) &= 120, \\ (x_1x_4)^2 &= t. \end{aligned}$$

Niech $s_{14} = x_1 + x_4$, $s_{23} = x_2 + x_3$, $p_{14} = x_1x_4$. Wówczas:

$$s_{14} + s_{23} = 15, \quad (3)$$

$$s_{14}s_{23} + 2p_{14} = 70, \quad (4)$$

$$p_{14}(s_{14} + s_{23}) = 120. \quad (5)$$

$$p_{14}^2 = t \quad (6)$$

Z (3) oraz (5) wynika, że

$$15p_{14} = 120,$$

skąd otrzymujemy $p_{14} = 8$. Z (6) natychmiast wyliczamy t :

$$t = p_{14}^2 = 64.$$

Z (3) oraz (4):

$$\begin{aligned} s_{14} + s_{23} &= 15, \\ s_{14}s_{23} &= 54. \end{aligned}$$

Stąd $(s_{14}, s_{23}) = (6, 9)$ lub $(s_{14}, s_{23}) = (9, 6)$. Zachodzić może $(s_1, s_2) = (9, 6)$. Skoro $x_1 + x_4 = 9$ i $x_2 + x_3 = 6$ oraz $x_2 = x_1q$, $x_3 = x_1q^2$, $x_4 = x_1q^3$, to $x_1(1 + q^3) = 9$ i $x_1q(1 + q) = 6$. Z uwagi na to, że 0 nie jest pierwiastkiem rozważanego równania, otrzymujemy, że $6(1 - q + q^2) = 9q$, skąd $q = 2$ lub $q = \frac{1}{2}$.

Jeżeli $q = 2$, to $x_1(1 + 2^3) = 9$, i wtedy kolejnymi pierwiastkami rozważanego równania są liczby 1, 2, 4, 8. Natomiast przypadek $q = \frac{1}{2}$ daje $x_1(1 + 2^{-3}) = 9$, skąd $x_1 = 8$ i w efekcie kolejnymi pierwiastkami rozważanego równania są liczby 8, 4, 2, 1.

Odpowiedź. Jedynym rzeczywistym t , dla którego równanie (1) ma cztery rzeczywiste pierwiastki będące kolejnymi wyrazami pewnego ciągu geometrycznego jest $t = 64$ i wtedy $\{1, 2, 4, 8\}$ jest zbiorem jego wszystkich rozwiązań.