

Zasada szufladkowa

Zadanie

Korzystając z zasady szufladkowej udowodnij sformułowane poniżej twierdzenia:

1. W każde pole szachownicy wymiaru $n \times n$, $n \geq 2$, wpisano jedną z liczb: $-1, 0, 1$, a następnie dodano liczby stojące w tym samym wierszu, w tej samej kolumnie i na tej samej przekątnej. Wykaż, że wśród otrzymanych sum co najmniej dwie są równe.
2. Danych jest 12 różnych naturalnych liczb dwucyfrowych. Wykaż, że wśród nich istnieją takie dwie, że ich różnica jest dwucyfrową liczbą o jednakowych cyfrach.

Rozwiązanie

Ad 1. Nazwijmy *linią* wiersz, kolumnę lub przekątną szachownicy. Szachownica wymiaru $n \times n$ zawiera $2n + 2$ linie (n wierszy + n kolumn + 2 przekątne). Załóżmy, że w każde pole szachownicy wymiaru $n \times n$, $n \geq 2$ wpisano jedną z liczb: $-1, 0, 1$. Wówczas dla każdej linii suma wpisanych w nią liczb jest liczbą całkowitą ze zbioru

$$X = \{-n, -(n-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, n-1, n\}.$$

Oczywiście $|X| = 2n + 1$. Dla każdego $k \in X$ oznaczmy przez A_k zbiór tych wszystkich linii, dla których suma wpisanych w nie liczb jest równa k . Tak zdefiniowanych zbiorów jest $2n + 1$ (niektóre z nich mogą być puste), ale ich suma zawiera wszystkie możliwe linie szachownicy. Stąd

$$|A_{-n} \cup A_{-(n-1)} \cup \dots \cup A_{-1} \cup A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup A_n| = 2n + 2 > 2n + 1.$$

Na mocy zasady szufladkowej z otrzymanej nierówności wynika, że co najmniej jeden ze zbiorów A_k zawiera co najmniej dwa elementy, którymi są linie szachownicy, wzdłuż których sumy wpisanych liczb są równa k , czyli są sobie równe.

Ad 2. Zauważmy, że zbiorem wszystkich reszt z dzielenia liczb naturalnych przez 11 jest

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Oczywiście $|X| = 11$. Niech

$$Z = \{n_1, n_2, \dots, n_{12}\}$$

będzie zbiorem dowolnych dwunastu dwucyfrowych liczb naturalnych. Dla każdego $k \in X$ oznaczmy przez A_k podzbiór zbioru Z złożony z tych wszystkich liczb należących do zbioru Z , które dają resztę k z dzielenia przez 11. Liczba takich podzbiorów jest równa 11 (niektóre z nich mogą być puste), a ich sumą jest zbiór Z . Stąd

$$|A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{10}| = |Z| = 12 > 11.$$

Na mocy zasady szufladkowej z otrzymanej nierówności wynika, że co najmniej jeden ze zbiorów A_k zawiera co najmniej dwie różne liczby; oznaczmy je m i n . Z założeń zadania i

przyjętych oznaczeń wynika, że m i n są liczbami dwucyfrowymi oraz $m = 11p+k$ i $n = 11q+k$ dla pewnych nieujemnych liczb całkowitych $p \neq q$. Bez straty ogólności rozważań można założyć, że $m > n$. Wtedy $9 \geq p > q \geq 0$, przy czym, jeżeli $q = 0$, to $k = 10$, a jeżeli $p = 9$, to $k = 0$. Ponadto $p - q \geq 1$, bo $p \neq q$. Wynika stąd, że

$$m - n = 11p + k - (11q + k) = 11(p - q), \quad \text{gdzie } p - q \in \mathbb{Z}.$$

Ponieważ $1 \leq p - q \leq 9$, więc $11 \leq m - n \leq 99$ i w konsekwencji $m - n$ jest dwucyfrową liczbą naturalną o jednakowych cyfrach; powtarzająca się cyfra to $p - q$.