

XV Ogólnopolski Konkurs Matematyczny "W Świecie Matematyki"

im. Prof. Włodzimierza Krywickiego

Etap drugi - 8 marca 2024 r.

Maksymalna liczba punktów do zdobycia: 50.

1. Drugi etap Konkursu składa się z 5 zadań z treścią, w tym 2 zadań z matematyki wyższej.
2. Maksymalna liczba punktów do zdobycia za każde z zadań podana jest przy jego numerze.
3. Zabrania się korzystania z korektora.
4. Dozwolone jest korzystanie z zestawu wybranych wzorów matematycznych wydanych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną oraz kalkulatora podstawowego.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielnej pracy uczestnika Konkursu zostaje on wykluczony z Konkursu.

ZADANIE NR 1 (6p)

Rozważmy kwadrat $ABCD$. Punkty U i W leżą odpowiednio na jego bokach BC i CD . Udowodnij, że obwód trójkąta CUW jest równy dwukrotności długości boku kwadratu $ABCD$ wtedy i tylko wtedy, gdy miara kąta $\angle UAW$ równa jest $\frac{\pi}{4}$.

ZADANIE NR 2 (7p)

Wyznacz wszystkie wartości $t \in \mathbb{R}$, dla których równanie

$$x^4 - 15x^3 + 70x^2 - 120x + t = 0$$

zmiennej rzeczywistej x ma cztery rzeczywiste pierwiastki będące kolejnymi wyrazami pewnego ciągu geometrycznego. Dla wyznaczonych t znajdź pierwiastki danego równania.

ZADANIE NR 3 (7p)

(a) Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem arytmetycznym. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ wyznacz formułę określającą wartość sumy $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n$.

(b) Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych.

Zdefiniujmy ciąg $b_n = a_{n+2} - a_n$, dla $n \in \mathbb{N}$.

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oblicz sumę $b_1 + b_2 + \dots + b_n$, a następnie zastosuj użytą metodę do wyznaczenia wartości poniższej sumy:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+2)}.$$

ZADANIE NR 4 (15p)

Definicja 1. Gdy X jest zbiorem niepustym to funkcję $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ nazywamy *metryką*, jeśli spełnione są warunki:

$$\begin{aligned}\forall_{x,y \in X} \quad & (d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y); \\ \forall_{x,y \in X} \quad & d(x,y) = d(y,x); \\ \forall_{x,y,z \in X} \quad & d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).\end{aligned}$$

Wtedy parę (X, d) nazywamy przestrzenią metryczną.

Metryka jest uogólnieniem pojęcia odległości. W szczególności można sprawdzić, że metrykami są funkcje:

$$\begin{aligned}d_1(x,y) &:= |x - y| \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}; \\ d_2(P_1, P_2) &:= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad \text{dla } P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2; \\ d_3(P_1, P_2) &:= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \quad \text{dla } P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2,\end{aligned}$$

gdzie dla $i = 1, 2$, $P_i := (x_i, y_i)$. d_1 i d_2 to tzw. metryki euklidesowe opisujące naturalne odległości, jakich używamy na prostej i płaszczyźnie. Z kolei d_3 to tzw. metryka taksówkowa – odległość, której używamy w mieście poruszając się samochodem (zakładamy, nieco upraszczając, że ulice biegną tylko w kierunkach północ-południe i wschód-zachód oraz są dwukierunkowe).

Ważnym twierdzeniem w teorii przestrzeni metrycznych jest tzw. zasada odwzorowań zwężających odkryta przez Stefana Banacha w 1922 r. Przed jej sformułowaniem podamy dwie definicje.

Definicja 2. Gdy $X \neq \emptyset$ i $f: X \rightarrow X$ to ciąg (f^n) określony niżej nazywamy ciągiem kolejnych *iterat* funkcji f : dla dowolnego $x \in X$,

$$f^1(x) := f(x) \quad \text{ i } \quad f^{n+1}(x) := f(f^n(x)) \quad \text{ dla dowolnego } n \in \mathbb{N}.$$

W szczególności $f^2(x) = f(f(x))$, $f^3(x) = f(f^2(x)) = f(f(f(x)))$ itd.

Definicja 3. Gdy (X, d) jest przestrzenią metryczną to funkcję $f: X \rightarrow X$ nazywamy *odwzorowaniem zwężającym*, jeśli

$$\exists_{c \in [0,1)} \quad \forall_{x,y \in X} \quad d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y).$$

Liczbę c spełniającą powyższy warunek nazywamy *stałą zwężania*.

Twierdzenie 1 (Banach). *Załóżmy, że (X, d) jest przestrzenią metryczną zupełną i $f: X \rightarrow X$ jest odwzorowaniem zwężającym ze stałą zwężania c . Wówczas istnieje dokładnie jeden taki punkt $x_* \in X$, że $x_* = f(x_*)$. Ponadto dla dowolnego $x_0 \in X$,*

$$d(f^n(x_0), x_*) \leq \frac{c^n}{1 - c} d(x_0, f(x_0)),$$

a stąd ciąg $(f^n(x_0))$ jest zbieżny do x_ .*

Pomijamy definicję zupełności i przyjmujemy do wiadomości, że przestrzenie (\mathbb{R}, d_1) , (\mathbb{R}^2, d_2) i (\mathbb{R}^2, d_3) są zupełne.

Zadania do wykonania

(a) Korzystając z twierdzenia 1 udowodnij, że równanie

$$x = \frac{2}{x^2 + 4}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie w \mathbb{R} i wyznacz jego przybliżoną wartość z dokładnością do 0,05.

(b) Wykaż z pomocą twierdzenia 1, że układ równań

$$\begin{cases} 2x - y - \sin x &= 4 \\ -x + 3y - \cos y &= 5 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie w \mathbb{R}^2 .

Wskazówka. Zapisz układ w postaci $(x, y) = F(x, y)$, gdzie $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest odpowiednio zdefiniowaną funkcją, a następnie zastosuj twierdzenie 1 rozważając F na przestrzeni metrycznej (\mathbb{R}^2, d_3) .

Zasada szufladkowa

Wprowadzenie

Jeżeli X jest zbiorem złożonym ze skończonej liczby elementów, to tę liczbę elementów oznaczamy przez $|X|$. Głównym narzędziem potrzebnym do rozwiązania podanych dalej zadań będzie następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1 (Zasada szufladkowa). *Niech dane będą zbiory skończone A_1, A_2, \dots, A_n takie, że $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| > n$. Wówczas istnieje taka liczba $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, że zbiór A_k zawiera co najmniej dwa elementy.*

Nazwę powyższego twierdzenia wyjaśnia mniej precyzyjne, ale bardziej popularne (i, być może, bardziej obrazowe) jego sformułowanie.

Twierdzenie 2 (Zasada szufladkowa). *Niech n będzie liczbą naturalną. Jeżeli co najmniej $n + 1$ przedmiotów rozmieszczono w n szufladkach, to przynajmniej jedna szufladka zawiera co najmniej dwa przedmioty.*

PRZYKŁAD 1. Uzasadnij, że spośród dowolnych jedenastu liczb naturalnych można wybrać co najmniej takie dwie liczby, że ich różnica jest liczbą naturalną, której ostatnią cyfrą jest 0.

Rozwiązanie

Zauważmy, że ostatnią cyfrą liczby naturalnej N jest 0 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba N jest podzielna przez 10.

Jeżeli zbiór X zawiera 11 liczb naturalnych, to co najmniej dwie z tych liczb dają taką samą resztę z dzielenia przez 10. Wynika to bezpośrednio z zasady szufladkowej, ponieważ jest dokładnie dziesięć różnych reszt z dzielenia przez 10; są to liczby 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Jeśli więc A_k jest zbiorem zawierającym te wszystkie liczby ze zbioru X , które dają resztę k z dzielenia przez 10, to

$$X = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_9$$

oraz $|X| = 11$. Ponieważ liczba elementów zbioru X jest większa od liczby zbiorów A_k , więc na mocy zasady szufladkowej jeden z tych zbiorów zawiera co najmniej dwie liczby naturalne, np. a i b , dające tę samą resztę r z dzielenia przez 10. Liczby te można zapisać w postaci $a = 10p + r$ i $b = 10q + r$ dla pewnych $p, q \in \mathbb{N}$. Jeżeli przyjmiemy, że $a < b$, to

$$b - a = 10q + r - (10p + r) = 10(q - p)$$

jest liczbą naturalną podzielną przez 10, bo $q - p$ jest liczbą naturalną.

PRZYKŁAD 2. Na pewnej konferencji znalazło się n osób, z których każda zna pewną liczbę spośród pozostałych osób lub nie zna nikogo. Wykaż, że co najmniej dwie osoby mają tylu samo znajomych wśród uczestników konferencji lub co najmniej dwie osoby nie znają nikogo. Zakładamy, że relacja znajomości jest symetryczna, tzn, jeżeli X zna Y , to Y zna X .

Rozwiązanie

Każdy uczestnik konferencji zna od zera do $n - 1$ innych uczestników.

Dla każdej liczby $k \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ oznaczmy przez A_k zbiór tych wszystkich osób, które znają dokładnie k osób. Zbiory A_k można interpretować, jako „szufladki”, w których są umieszczane osoby znające dokładnie k innych uczestników konferencji. Ponieważ $A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}$ jest zbiorem wszystkich uczestników konferencji, więc

$$|A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}| = n.$$

Równość ta pozornie nie wystarcza do stosowania zasady szufladkowej, bo liczba wszystkich osób jest równa liczbie „szufladek”, a nie jest większa od niej. Zauważmy jednak, że

(1) jeżeli na konferencji jest ktoś, kto nie zna żadnego innego uczestnika tej konferencji, to na mocy założenia o symetrii relacji znajomości, nie może istnieć uczestnik konferencji znający wszystkich pozostałych jej uczestników, a więc jeżeli $A_0 \neq \emptyset$, to $A_{n-1} = \emptyset$;

(2) podobnie wykazujemy, że jeżeli $A_{n-1} \neq \emptyset$, to zbiór A_0 jest pusty.

Z (1) i (2) wynika, że wśród zbiorów A_0, A_1, \dots, A_{n-1} jest co najwyżej $n - 1$ zbiorów niepustych, a stąd dostajemy nierówność

$$|A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}| > n - 1 \geq \text{liczba niepustych zbiorów } A_k$$

(liczba uczestników konferencji jest większa od liczby niepustych „szufladek”).

Z otrzymanej nierówności, na mocy zasady szufladkowej, wynika że przynajmniej jeden ze zbiorów A_k zawiera co najmniej dwa elementy, czyli istnieją co najmniej dwie osoby, z których każda ma dokładnie k znajomych wśród uczestników konferencji, a więc osoby te mają taką samą liczbę znajomych.

Zadania do wykonania

Korzystając z zasady szufladkowej udowodnij sformułowane poniżej twierdzenia:

1. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. W każde pole szachownicy wymiaru $n \times n$ wpisano jedną z liczb: $-1, 0, 1$, a następnie dodano liczby stojące w tym samym wierszu, w tej samej kolumnie i na tej samej przekątnej. Wykaż, że wśród otrzymanych sum co najmniej dwie są równe.

2. Danych jest 12 różnych naturalnych liczb dwucyfrowych. Wykaż, że wśród nich istnieją takie dwie, że ich różnica jest dwucyfrową liczbą o jednakowych cyfrach.