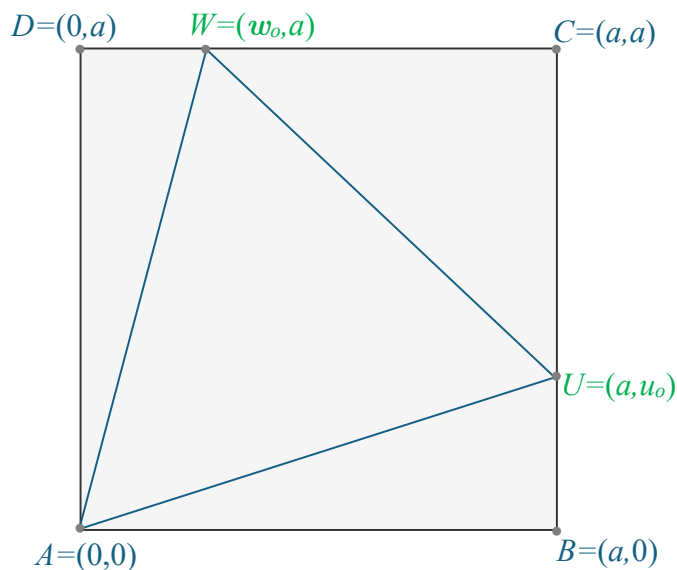


ZADANIE NR 1

Rozważmy kwadrat $ABCD$. Punkty U i W leżą odpowiednio na jego bokach BC i CD . Udowodnij, że obwód trójkąta CUW jest równy dwukrotności długości boku kwadratu $ABCD$ wtedy i tylko wtedy, gdy miara kąta $\angle UAW$ równa jest $\frac{\pi}{4}$.

Rozwiązanie. Niech a będzie długością boku kwadratu $ABCD$ oraz niech $A = (0, 0)$, $B = (a, 0)$, $C = (a, a)$, $D = (0, a)$, $U = (a, u_o)$, $W = (w_o, a)$ dla pewnych $u_o, w_o \in (0, a)$ — gdyż zakłada się istnienie trójkąta CUW .



Oznaczmy przez α miarę kąta UAW . Zauważmy, że $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Na mocy twierdzenia cosinusów:

$$\begin{aligned} 2|AU| \cdot |AW| \cdot \cos \alpha &= |AU|^2 + |AW|^2 - |UW|^2 \\ &= a^2 + u_o^2 + w_o^2 + a^2 - (a - w_o)^2 - (a - u_o)^2 \\ &= 2a(u_o + w_o), \end{aligned}$$

a stąd

$$|AU| \cdot |AW| \cdot \cos \alpha = a(u_o + w_o).$$

Miara kąta UAW równa jest $\frac{\pi}{4}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|AU| \cdot |AW| \cdot \cos \frac{\pi}{4} = a(u_o + w_o).$$

Ostatnie jest równoważne kolejnym zdaniom:

$$\sqrt{a^2 + u_o^2} \sqrt{w_o^2 + a^2} = \sqrt{2} a(u_o + w_o),$$

$$\begin{aligned}
& (a^2 + u_o^2)(w_o^2 + a^2) = 2a^2(w_o + u_o)^2, \\
& a^4 + a^2w_o^2 + a^2u_o^2 + u_o^2w_o^2 = 2a^2w_o^2 + 4a^2u_ow_o + 2a^2u_o^2, \\
& a^4 - 2a^2u_ow_o + u_o^2w_o^2 = a^2u_o^2 + 2a^2w_ou_o + a^2w_o^2, \\
& (a^2 - u_ow_o)^2 = a^2(u_o + w_o)^2, \\
& a^2 - u_ow_o = a(u_o + w_o), \\
& 2a^2 - 2u_ow_o = 2au_o + 2aw_o, \\
& 2a^2 - 2au_o - 2aw_o = 2u_ow_o, \\
& (a^2 - 2au_o + u_o^2) + (a^2 - 2aw_o + w_o^2) = u_o^2 + 2u_ow_o + w_o^2, \\
& (a - u_o)^2 + (a - w_o)^2 = (u_o + w_o)^2, \\
& \sqrt{(a - u_o)^2 + (a - w_o)^2} = u_o + w_o, \\
& |WU| = |BU| + |WD|, \\
& |WU| + |UC| + |CW| = (|BU| + |UC|) + (|CW| + |WD|), \\
& |WU| + |UC| + |CW| = |BC| + |CD|, \\
& |WU| + |UC| + |CW| = a + a.
\end{aligned}$$

Ostatnie zdanie równoważne jest zdaniu: Obwód trójkąta CUW równy jest $2a$. ■