

# Szósty Wojewódzki Konkurs Matematyczny „W świecie matematyki”

im. Prof. Włodzimierza Krywickiego

Etap drugi

18 lutego 2014 r.

Maksymalna do zdobycia ilość punktów: 80

1. Drugi etap Konkursu składa się z 4 zadań z treścią oraz 3 zadań z matematyki wyższej (do zadań tych dołączone są definicje, twierdzenia i przykłady pomocne w ich rozwiązywaniu).
2. Maksymalna liczba punktów do zdobycia za każde z zadań podana jest przy numerze zadania.
3. Zabrania się korzystania z korektora.
4. Podczas tego etapu Konkursu dozwolone jest korzystanie z „Zestawu wybranych wzorów matematycznych” wydawanych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną.
5. Zabrania się korzystania z kalkulatora.
6. W przypadku stwierdzenia niesamodzielnej pracy uczestnika Konkursu (poza korzystaniem z tablic matematycznych wymienionych w punkcie 4) zostaje on wykluczony z Konkursu.

**Zadanie 1** (8 punktów). Środki czterech kół o promieniu  $a > 0$  znajdują się w wierzchołkach kwadratu o boku  $a$ . Znaleźć pole części wspólnej danych czterech kół.

**Zadanie 2** (10 punktów). Wykaż, że dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}$  i dowolnego  $k \in \mathbb{N}$  takiego, że  $k \geq 2$ , liczba  $\sqrt[k]{n^2 + n}$  nie jest wymierna.

**Zadanie 3** (8 punktów). Określ liczbę dzielników liczby

$$2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot \dots \cdot 20^{20}.$$

**Zadanie 4** (9 punktów). Niech  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Rozważmy następujące liczby

$$M = \max \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot a_i : \alpha_i \in \{0, 1\} \right\}, \quad m = \min \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot a_i : \alpha_i \in \{0, 1\} \right\}.$$

Pokaż, że

$$M = \frac{\sum_{i=1}^n |a_i| + \sum_{i=1}^n a_i}{2}$$

oraz

$$m = \frac{\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n |a_i|}{2}.$$

**Definicja.** Rozważmy niepusty zbiór  $G$  oraz dwuargumentowe działanie  $\circ$  w zbiorze  $G$ , tj.  $\circ : G \times G \rightarrow G$ . Uporządkowaną parę  $(G, \circ)$  nazywamy **grupą** jeśli

1.  $\forall_{a,b,c \in G} (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ ;
2.  $\exists_{e \in G} \forall_{a \in G} a \circ e = e \circ a = a$  (element  $e$  nazywamy elementem neutralnym działania  $\circ$ );
3.  $\forall_{a \in G} \exists_{b \in G} a \circ b = b \circ a = e$  (element  $b$  nazywamy elementem odwrotnym do  $a$ ).

Ponadto, jeśli

$$\forall_{a,b \in G} a \circ b = b \circ a$$

to grupę  $(G, \circ)$  nazywamy **abelową (przemienną)**.

**Przykład 1.** Rozważmy zbiór  $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  oraz działanie  $\circ : \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5$  określone wzorem

$$x \circ y = x + y \pmod{5}$$

(tzn.  $x \circ y$  to reszta z dzielenia  $x + y$  przez 5). Wówczas para  $(\mathbb{Z}_5, \circ)$  jest grupą abelową.

**Zadanie 5** (7+8 = 15 punktów).

a) Niech  $G = \mathbb{R}$  oraz rozważmy działanie  $\star : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określone wzorem

$$x \star y = x + y + 4.$$

Sprawdzić czy  $(G, \star)$  jest grupą abelową.

b) Niech będzie dana grupa  $(G, \circ)$  trójelementowa i niech  $G = \{a, b, c\}$ . Pokazać, że grupa ta jest abelowa.

**Definicja.** Niech  $X, Y$  będą zbiorami. Iloczynem kartezjańskim zbiorów  $X$  i  $Y$  nazywamy zbiór  $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ .

**Definicja.** Relacją w zbiorze  $X$  nazywamy dowolny zbiór  $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ . Dla uproszczenia zapisu zamiast  $(x, y) \in \mathcal{R}$  piszemy  $x\mathcal{R}y$ .

**Przykład 2.** Relacją w zbiorze  $\mathbb{N}$  jest klasyczna relacja  $\leq$  (tj.  $(n, m) \in \leq$  wtedy i tylko wtedy gdy  $n \leq m$ ).

**Definicja.** Powiemy, że relacja  $\mathcal{R}$  w zbiorze  $X$  jest:

- a) zwrotna, jeśli  $\forall_{x \in X} x\mathcal{R}x$ ;
- b) przechodnia, jeśli  $\forall_{x, y, z \in X} (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$ ;
- c) słabo antysymetryczna, jeśli  $\forall_{x, y \in X} (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \implies x = y$ .

Relację, która jest zwrotna, przechodnia i słabo antysymetryczna, nazywamy **relacją częściowego porządku** w zbiorze  $X$ . Relację, która jest relacją częściowego porządku oznaczamy z reguły symbolem  $\preceq$ .

**Przykład 3.** Rozważmy zbiór  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  (wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych) oraz relację inkluzji (zawierania)  $\subseteq$  w tym zbiorze. Jest to relacja częściowego porządku.

- Pokażemy, że  $\subseteq$  jest zwrotna. Niech  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ , mamy oczywiście  $A \subseteq A$ .
- Pokażemy, że  $\subseteq$  jest przechodnia. Niech  $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$  i załóżmy, że  $A \subseteq B$  oraz  $B \subseteq C$ . Wówczas oczywiście  $A \subseteq C$ .
- Pokażemy, że  $\subseteq$  jest słabo antysymetryczna. Niech  $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$  i załóżmy, że  $A \subseteq B$  oraz  $B \subseteq A$ . Wówczas  $A = B$ .

**Definicja.** Niech  $X$  będzie niepustym zbiorem oraz  $\preceq$  będzie relacją częściowego porządku w tym zbiorze. Element  $a \in X$  nazywamy elementem:

- **najmniejszym**, jeśli  $\forall_{x \in X} a \preceq x$ ;
- **minimalnym**, jeśli nie istnieje  $x \in X$  taki, że  $x \neq a$  oraz  $x \preceq a$ ;
- **największym**, jeśli  $\forall_{x \in X} x \preceq a$ ;

- **maksymalnym**, jeśli nie istnieje  $x \in X$  taki, że  $x \neq a$  oraz  $a \preceq x$ .

**Twierdzenie 4.** Niech  $X$  będzie niepustym zbiorem oraz  $\preceq$  będzie relacją częściowego porządku w tym zbiorze. Wówczas każdy element największy jest maksymalny i każdy element najmniejszy jest minimalny.

**Przykład 5.** Rozważmy zbiór  $X = \{2, 4, 6, 8\}$  oraz relację  $\preceq$  w tym zbiorze zdefiniowaną następująco

$$x \preceq y \iff x \text{ dzieli } y.$$

Pokażemy, że  $\preceq$  jest relacją częściowego porządku:

- Pokażemy, że  $\preceq$  jest zwrotna. Niech  $x \in X$ . Wówczas oczywiście  $x$  dzieli  $x$ , zatem  $x \preceq x$ .
- Pokażemy, że  $\preceq$  jest przechodnia. Niech  $x, y, z \in X$  i założmy, że  $x \preceq y$  oraz  $y \preceq z$ , tj.  $y = kx, z = ly$  dla pewnych  $k, l \in \mathbb{Z}$ . Mamy stąd, że  $z = klx$  oraz  $kl \in \mathbb{Z}$ , zatem  $x$  dzieli  $z$ , więc  $x \preceq z$ .
- Pokażemy, że  $\preceq$  jest słabo antysymetryczna. Niech  $x, y \in X$  i założmy, że  $x \preceq y$  oraz  $y \preceq x$ . Stąd  $x$  dzieli  $y$  oraz  $y$  dzieli  $x$ , zatem  $x = y$ .

Zauważmy, że w zbiorze  $X$  istnieje element najmniejszy, istnieje element minimalny, istnieją dwa elementy maksymalne ale nie istnieje element największy. Istotnie

- Liczba 2 jest elementem najmniejszym, ponieważ  $2 \preceq 2, 2 \preceq 4, 2 \preceq 6, 2 \preceq 8$ .
- Wobec Twierdzenia 4, liczba 2 jest elementem minimalnym. Ale widać to też wprost z definicji: nie istnieje  $x \in X, x \neq 2$  taki, że  $x \preceq 2$  (nie istnieje w  $X$  liczba, która dzieli 2 i jest różna od 2).
- Elementami maksymalnymi są 8 oraz 6, ponieważ nie istnieje w  $X$  element  $x \neq 8$ , taki, że  $8 \preceq x$ . Podobnie dla 6.
- Nie istnieje element największy, ponieważ jedynymi kandydatami są 6 i 8 ale mamy, że  $\neg(6 \preceq 8)$  oraz  $\neg(8 \preceq 6)$ .

**Definicja.** Relację częściowego porządku  $\preceq$  w zbiorze  $X$  nazywamy liniową, jeśli

$$\forall x, y \in X \quad x \preceq y \vee y \preceq x.$$

**Przykład 6.** Zauważmy, że relacja częściowego porządku w Przykładzie 5 nie jest liniowa, ponieważ nieprawda, że  $6 \preceq 8$  oraz nieprawda, że  $8 \preceq 6$ . Innymi słowy, elementy  $6, 8 \in X$  są nieporównywalne.

**Przykład 7.** W zbiorze  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  rozważmy następującą relację

$$(n, m) \preceq (k, l) \iff ((n < k) \vee (n = k \wedge m \leq l)).$$

Na przykład w relacji  $\preceq$  są:  $(1, 2) \preceq (2, 1), (3, 4) \preceq (3, 7)$ . Pokażemy, że  $\preceq$  jest relacją częściowego porządku:

- Pokażemy, że  $\preceq$  jest zwrotna. Niech  $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Wówczas oczywiście  $(n, m) \preceq (n, m)$ .
- Pokażemy, że  $\preceq$  jest przechodnia. Niech  $(n_1, m_1), (n_2, m_2), (n_3, m_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  i załóżmy, że  $(n_1, m_1) \preceq (n_2, m_2)$  oraz  $(n_2, m_2) \preceq (n_3, m_3)$ . Mamy następujące możliwości

–  $n_1 < n_2$  oraz  $n_2 < n_3$ . Wówczas mamy  $n_1 < n_2 < n_3$ , skąd  $n_1 < n_3$ , zatem  $(n_1, m_1) \preceq (n_3, m_3)$ .

–  $n_1 < n_2$  oraz  $n_2 = n_3$  i  $m_2 \leq m_3$ . Wówczas  $n_1 < n_2 = n_3$ , czyli  $n_1 < n_3$ . Zatem  $(n_1, m_1) \preceq (n_3, m_3)$ .

w pozostałych przypadkach podobnie.

- Pokażemy, że jest słabo antysymetryczna. Niech  $(n_1, m_1), (n_2, m_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  i załóżmy, że  $(n_1, m_1) \preceq (n_2, m_2)$  oraz  $(n_2, m_2) \preceq (n_1, m_1)$ . Łatwo widać, że mamy jedynie możliwość  $(n_1, m_1) \preceq (n_2, m_2)$ , gdyż  $n_1 = n_2$  i  $m_1 \leq m_2$  oraz  $(n_2, m_2) \preceq (n_1, m_1)$ , ponieważ  $n_2 = n_1$  i  $m_2 \leq m_1$ . Wówczas  $n_1 = n_2, m_1 = m_2$  czyli  $(n_1, m_1) = (n_2, m_2)$ .

Wobec powyższego  $\preceq$  jest częściowym porządkiem w  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Zauważmy, że element  $(1, 1)$  jest elementem najmniejszym i minimalnym. Istotnie, dla każdego  $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  oczywiście mamy  $(1, 1) \preceq (n, m)$ . Ponadto (wobec Twierdzenia 4), nie istnieje ani element maksymalny ani największy, bowiem dla każdego  $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  mamy oczywiście  $(n, m) \preceq (n + 1, m)$ . Porządek  $\preceq$  jest liniowy.

**Zadanie 6** (6+9=15 punktów).

- a) Rozważmy zbiór  $X = \{3, 7, 9, 12, 252\}$  i relację  $\preceq$  określoną formułą

$$x \preceq y \iff x \text{ dzieli } y.$$

Czy istnieją w tym zbiorze elementy najmniejsze, minimalne, największe, maksymalne?  
Odpowiedzi uzasadnij i ewentualnie wskaż te elementy.

- b) Rozważmy zbiór  $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  oraz dwie relacje  $\preceq_1, \preceq_2$  określone następująco

$$(n, m) \preceq_1 (k, l) \iff n \leq k \wedge m \leq l,$$

$$(n, m) \preceq_2 (k, l) \iff n \geq k \wedge m = l.$$

Pokaż, że  $\preceq_1, \preceq_2$  są relacjami częściowego porządku. Czy istnieją w tych porządkach w zbiorze  $X$  elementy najmniejsze, minimalne, największe, maksymalne? Odpowiedzi uzasadnij i ewentualnie wskaż te elementy.

**Definicja.** Niech  $X$  będzie niepustym zbiorem. Rodzinę  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$  nazywamy **ciałem**, jeśli spełnia następujące warunki

1.  $\emptyset \in \mathcal{F}$ ;
2.  $\forall A \in \mathcal{F} \quad X \setminus A \in \mathcal{F}$ ;
3.  $\forall A, B \in \mathcal{F} \quad A \cup B \in \mathcal{F}$ .

Dodatkowo, jeśli zamiast warunku 3. zachodzi warunek

$$3'. \forall A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F},$$

to ciało  $\mathcal{F}$  nazywamy  **$\sigma$ -ciałem**.

**Przykład 8.** Niech  $X = \mathbb{N}$  oraz  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ . Wówczas  $\mathcal{F}$  jest  $\sigma$ -ciałem. Istotnie, mamy

- $\emptyset \in \mathcal{F}$ ;
- Niech  $A \in \mathcal{F}$ , tj.  $A \subseteq \mathbb{N}$ . Wówczas oczywiście  $\mathbb{N} \setminus A \subseteq \mathbb{N}$ , zatem  $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}$ ;
- Niech  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ , tj.  $A_n \subseteq \mathbb{N}$  dla  $n \in \mathbb{N}$ . Wtedy oczywiście  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq \mathbb{N}$ , czyli  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ .

**Przykład 9.** Niech  $X = \mathbb{N}$  i niech  $W = \{1, 2, 3\}$ . Rodzina  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathbb{N}, W, \mathbb{N} \setminus W\}$  jest  $\sigma$ -ciałem. Istotnie, mamy

- $\emptyset \in \mathcal{F}$  z definicji rodziny  $\mathcal{F}$ ;
- Niech  $A \in \mathcal{F}$ . Mamy następujące możliwości
  - $A = \emptyset$ , wtedy  $\mathbb{N} \setminus A = \mathbb{N}$ , więc  $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}$ ;
  - $A = \mathbb{N}$ , wtedy  $\mathbb{N} \setminus A = \emptyset$ , więc  $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}$ ;
  - $A = W$ , wtedy  $\mathbb{N} \setminus A = \mathbb{N} \setminus W$ , więc  $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}$ ;
  - $A = \mathbb{N} \setminus W$ , wtedy  $\mathbb{N} \setminus A = W$ , więc  $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}$ .
- Niech  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ . Ponieważ  $\mathcal{F}$  jest skończona, to mamy tylko następujące możliwości
  - jeśli w ciągu  $A_1, A_2, \dots$  występują tylko zbiory puste, to wtedy  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset \in \mathcal{F}$ ;



- jeśli w ciągu  $A_1, A_2, \dots$  występuje zbiór  $\mathbb{N}$ , wtedy  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{N} \in \mathcal{F}$ ;
- jeśli w ciągu  $A_1, A_2, \dots$  występują zbiór  $W$  oraz  $\mathbb{N} \setminus W$ , wtedy  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{N} \in \mathcal{F}$ ;
- jeśli w ciągu  $A_1, A_2, \dots$  występują tylko zbiory puste i pojawia się zbiór  $W$ , wtedy  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = W \in \mathcal{F}$ ;
- jeśli w ciągu  $A_1, A_2, \dots$  występują tylko zbiory puste i pojawia się zbiór  $\mathbb{N} \setminus W$ , wtedy  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{N} \setminus W \in \mathcal{F}$ .

**Zadanie 7** (8+7=15 punktów).

a) Niech  $X = \mathbb{N}$  i rozważmy rodzinę

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} : A - \text{ jest skończony lub } \mathbb{N} \setminus A - \text{ jest skończony}\}.$$

Sprawdzić czy  $\mathcal{F}$  jest ciałem. Czy jest też  $\sigma$ -ciałem?

b) Niech  $X = \{a, b, c, d\}$  i niech  $\mathcal{F} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{b, c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c\}, \{b, d\}\}$ . Sprawdzić czy  $\mathcal{F}$  jest ciałem. Czy jest też  $\sigma$ -ciałem?