XIII Wojewódzki Konkurs Matematyczny "W świecie Matematyki"

im. Prof. Włodzimierza Krysickiego

Etap drugi - 4 marca 2022 r.

Maksymalna liczba punktów do zdobycia: 80.

1. Drugi etap Konkursu składa się z 7 zadań z treścią, w tym 3 zadań z matematyki wyższej - do zadań tych dołączone są definicje, twierdzenia i przykłady pomocne w ich rozwiązywaniu.
2. Maksymalna liczba punktów do zdobycia za każde z zadań podana jest przy jego numerze.
3. Zabrania się korzystania z korektora.
4. Zabrania się korzystania z kalkulatora.
5. Dozwolone jest korzystanie z **Zestawu wybranych wzorów matematycznych** wydanych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną.
6. W przypadku stwierdzenia niesamodzielnej pracy uczestnika Konkursu (poza korzystaniem z tablic matematycznych wymienionych w punkcie 5.) zostaje on wykluczony z Konkursu.

ZADANIE NR 1 (5p)

Dany jest trójkąt, którego długości boków tworzą ciąg geometryczny. Wyznacz ograniczenia dolne i górne na iloraz tego ciągu.

ZADANIE NR 2 (9p)

Dane są dwa okręgi: $x^2 + y^2 = 4 - m$ oraz $x^2 + y^2 = m - 2$. Dla jakiej wartości parametru m suma odwrotności długości promieni tych okręgów ma wartość najmniejszą?
Wykaż, że dla wszystkich dopuszczalnych wartości m zachodzi: $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \geqslant r_1 + r_2$, gdzie r_1, r_2 są promieniami zadanych okręgów.

Wskazówka/Przykład Aby wyznaczyć pochodną funkcji złożonej $f(x) = (g(x))^\alpha$, stosujemy następujący wzór

$$f'(x) = \alpha\,(g(x))^{\alpha-1} \cdot g'(x).$$

Dla przykładu, dla funkcji $f(x) = (4x^2 - x + 1)^{-5}$, otrzymujemy $f'(x) = -5 \cdot (4x^2 - x + 1)^{-6} \cdot (8x - 1)$.

ZADANIE NR 3 (7p)

Udowodnij, że

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \leqslant \sqrt{c(ab+1)}$$

dla dowolnych $a, b, c \geqslant 1$.

ZADANIE NR 4 (15p)

Definicja 1. *(prawdopodobieństwo geometryczne - model jednowymiarowy[1])*
Niech $\Omega = [a, b]$ dla pewnych $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Przez $\mathcal{I}_1$ oznaczmy rodzinę przedziałów domkniętych zawartych w Ω, oraz skończonych sum takich przedziałów, tj. elementami rodziny $\mathcal{I}_1$ są zbiory postaci

$$[a_1, b_1] \cup ... \cup [a_n, b_n]$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz $a \leqslant a_i < b_i \leqslant b$ dla $i = 1, ..., n$.
Dla zbioru $A \in \mathcal{I}_1$, zdefiniujmy

$$P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|},$$

gdzie $|\Omega|$ jest długością przedziału $[a, b]$, natomiast $|A|$ to suma długości przedziałów tworzących A.
Liczbę $P(A)$ nazwiemy *prawdopodobieństwem zdarzenia A.*
Trójkę $(\Omega, \mathcal{I}_1, P)$ nazwiemy *jednowymiarowym modelem prawdopodobieństwa geometrycznego.*

Przykład 1. Joanna codziennie wychodzi z domu w losowej chwili między godziną 5:00 a 5:30, przy czym prawdopodobieństwo wyjścia w danym przedziale czasu zależy tylko od długości tego przedziału. Obliczymy prawdopodobieństwo tego, że w danym dniu Joanna wyjdzie z domu albo nie później niż o 5:10, albo nie wcześniej niż o 5:20.
Treść problemu wskazuje, że możemy zastosować jednowymiarowy model prawdopodobieństwa geometrycznego. Przyjmijmy $\Omega = [0, 30]$. Zbiór Ω jest więc przedziałem czasu, w którym Joanna może wyjść z domu. Szukamy prawdopodobieństwa zdarzenia

$$A = [0, 10] \cup [20, 30]$$

[1] Przedstawione w treści modele są pewnymi wariantami bardziej zaawansowanego, ogólniejszego modelu prawdopodobieństwa geometrycznego.

gdyż ono odpowiada wyjściu Joanny w godzinach między 5:00 a 5:10, lub między 5:20 a 5:30. Zgodnie z modelem,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10+10}{30} = \frac{2}{3}.$$

Prawdopodobieństwo, że Joanna wyjdzie w deklarowanych godzinach wynosi $\frac{2}{3}$.

Definicja 2. *(prawdopodobieństwo geometryczne - model dwuwymiarowy)*
Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie pewną figurą geometryczną na płaszczyźnie - kołem, częścią koła, prostokątem, trójkątem, etc. Przez $\mathcal{I}_2$ oznaczmy rodzinę takich figur zawartych w Ω, oraz skończonych sum takich figur, tj. elementami rodziny $\mathcal{I}_2$ są zbiory postaci

$$A_1 \cup ... \cup A_n$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz $A_1, ..., A_n$ są pewnymi figurami zawartymi w Ω.
Dla zbioru $A \in \mathcal{I}_2$, zdefiniujmy

$$P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|},$$

gdzie $|\Omega|$ oraz $|A|$ to pola zbiorów Ω oraz A (pole A to suma pól figur przy rozkładzie A na figury rozłączne). Liczbę $P(A)$ nazwiemy *prawdopodobieństwem zdarzenia A.*
Trójkę $(\Omega, \mathcal{I}_2, P)$ nazwiemy *dwuwymiarowym modelem prawdopodobieństwa geometrycznego.*

Przykład 2. Filip strzela z łuku do okrągłej tarczy, przy czym prawdopodobieństwo trafienia w dany obszar tarczy zależy tylko od pola tego obszaru (zakładamy, że Filip zawsze trafia). Obliczymy prawdopodobieństwo tego, że Filip trafi w lewą połowę tarczy.
Treść problemu wskazuje, że możemy zastosować dwuwymiarowy model prawdopodobieństwa geometrycznego, oraz że wymiary tarczy nie mają znaczenia. Możemy więc przyjąć, że

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

tj. zbiór Ω jest kołem jednostkowym na płaszczyźnie, reprezentującym tarczę w którą trafia Filip. Szukamy prawdopodobieństwa zdarzenia

$$A = \{(x, y) \in \Omega : x \leqslant 0\},$$

czyli lewej połowy koła Ω, gdyż ona odpowiada lewej połowie tarczy. Zgodnie z modelem,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\pi} = \frac{1}{2}.$$

Prawdopodobieństwo, że Filip trafi w lewą połowę tarczy wynosi $\frac{1}{2}$.

W poniższych zadaniach zakładamy, że prawdopodobieństwa zależą tylko od długości/pól odpowiednich odcinków/obszarów i można do nich stosować modele geometryczne.

Problem do rozwiązania 4A (11p)

(a) Zgodnie z planem, autobus podjeżdża na przystanek o godzinie 6:00, przy czym może spóźnić się o maksymalnie 10 minut lub przyjechać do 5 minut przed czasem. Po przyjeździe, autobus od razu rusza w dalszą drogę.
Joanna przychodzi na przystanek punktualnie o godzinie 6:00 i czeka na autobus. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że uda jej się wsiąść do autobusu.

(b) Filip strzela z łuku do okrągłej tarczy o promieniu $r = 50$ cm. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że odległość punktu p trafienia w tarczę od środka tarczy jest niemniejsze niż 10 cm.

(c) Joanna i Filip umówili się na spotkanie wieczorem między godziną 18:00 a 19:00, przy czym oboje przychodzą w losowej chwili w tym zakresie czasu. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że Joanna i Filip nie będą na siebie czekali dłużej niż 15 minut.

Definicja 3. *(Rozszerzone modele prawdopodobieństwa geometrycznego)*
W naturalny sposób można rozszerzyć przedstawione modele o większe rodziny zbiorów. W modelu dwuwymiarowym, przez $\mathcal{I}_2^+$ oznaczmy rodzinę zbiorów A postaci

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k, \tag{1}$$

gdzie $A_1, A_2, A_3, ...$ jest pewnym takim ciągiem zbiorów z rodziny $\mathcal{I}_2$, że

$$A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_k \supset A_{k+1} \supset ... .$$

Dla zbioru A postaci (1), definiujemy prawdopodobieństwo A następująco

$$P(A) := \lim_{k\to\infty} P(A_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{|A_k|}{|\Omega|}.$$

Trójkę $(\Omega, \mathcal{I}_2^+, P)$ nazwiemy *rozszerzonym dwuwymiarowym modelem prawdopodobieństwa geometrycznego*. Analogicznie możemy zdefiniować *rozszerzony jednowymiarowy model.*

W poniższym punkcie zadania należy wykorzystać model rozszerzony.

Problem do rozwiązania 4B (4 p)

(d) Filip strzela z łuku do okrągłej tarczy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że Filip trafi dokładnie w środek tarczy.

ZADANIE NR 5 (15p)

Wiadomo, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma dokładnie trzy różne miejsca zerowe w punktach A, B, C oraz, że spełnione jest następujące równanie funkcyjne:

$$f(2022 + x) = f(2022 - x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Znajdziemy sumę $A + B + C$.
Zdefiniujmy funkcję $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem $g(x) = f(2022 + x)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Wówczas równanie (2) prowadzi nas do:

$$g(x) = f(2022 + x) = f(2022 - x) = g(-x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Oznacza to, że g jest funkcją parzystą. Ponadto, g ma tak jak f dokładnie trzy miejsca zerowe, oznaczmy je przez A_g, B_g, C_g. Zauważamy, że skoro funkcja g jest parzysta, a miejsc zerowych jest nieparzyście wiele, to jednym z miejsc zerowych g musi być zero (powiedzmy $B_g = 0$), a pozostałe dwa rozkładają się symetrycznie względem zera (czyli $A_g = -C_g$). Ich suma wynosi więc zero. Wynika stąd, że suma miejsc zerowych funkcji f to

$$A + B + C = A_g + 2022 + B_g + 2022 + C_g + 2022 = 6066.$$

Problem do rozwiązania (15p)
Rozważmy funkcje f_n dla $n = 0, 1, 2, \ldots$, dane wzorami:

$$f_0(x) = \frac{1}{1 - x}$$

$$f_n(x) = f_0(f_{n-1}(x)), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

(a) Sprawdź, że funkcje f_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ są określone dla wszystkich $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

(b) Wyznacz $f_{2022}(4)$.

ZADANIE NR 6 (14p)

Kurs otwarcia akcji[2] pewnej spółki XYZ notowanej na giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie jest wyznaczany w drodze aukcji. W tym celu zbiera się od inwestorów zlecenia kupna i sprzedaży z limitem ceny, a potem wyznacza się kurs otwarcia. Limit ceny oznacza cenę przy której inwestor zamierza kupić bądź sprzedać akcje.

Niech Λ oznacza ustalony z góry, skończony zbiór wszystkich możliwych cen akcji.
Załóżmy, że inwestorzy chcą łącznie zakupić $m \in \mathbb{N}$ akcji oraz sprzedać $n \in \mathbb{N}$ akcji, tj.

$$m = \sum_{c \in \Lambda} K_c, \qquad n = \sum_{c \in \Lambda} S_c,$$

gdzie K_c, S_c oznaczają, odpowiednio, łączną liczbę akcji, jaką inwestorzy chcą zakupić i sprzedać z limitem ceny c. Ustawmy $n + m$ limitów cen w ciąg niemalejący $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_{m+n}$. Stąd i-ty wyraz ciągu oznacza limit ceny w zleceniu kupna albo sprzedaży. Założymy dodatkowo, że istnieje zlecenie kupna oraz zlecenie sprzedaży, takie, że limit ceny kupna nie jest mniejszy od limitu ceny sprzedaży.

Problem znalezienia kursu otwarcia dla akcji XYZ, sprowadza się do wyznaczenia, tzw. *przedziału kursów równowagi* $\mathsf{M} = [p_m, p_{m+1}]$, a następnie wyboru odpowiedniej wartości z tego zbioru wg następującego algorytmu:

1. Jeżeli $p_m = p_{m+1}$, to kurs otwarcia jest równy p_m, o ile $p_m \in \Lambda$; w przeciwnym wypadku kurs nie jest wyznaczony.
2. Jeżeli $p_m < p_{m+1}$ oraz
   a) $(p_m, p_{m+1}) \cap \Lambda \neq \emptyset$, to wybieramy ten kurs ze zbioru $(p_m, p_{m+1}) \cap \Lambda$, który jest najbliżej kursu zamknięcia;
   b) $(p_m, p_{m+1}) \cap \Lambda = \emptyset$ oraz
      (i) $p_m, p_{m+1} \in \Lambda$, to za kurs otwarcia przyjmujemy kurs ze zbioru $\{p_m, p_{m+1}\}$, który minimalizuje niezrealizowane transakcje, tj. $\arg\min_{p \in \{p_m, p_{m+1}\}} \mathrm{NR}(p)$ (patrz wzór (3)); jeżeli oba minimalizują, to wybieramy ten który jest najbliżej kursu zamknięcia;
      (ii) $p_m \in \Lambda$ i $p_{m+1} \notin \Lambda$, to kurs otwarcia jest równy p_m;
      (iii) $p_m \notin \Lambda$ i $p_{m+1} \in \Lambda$, to kurs otwarcia jest równy p_{m+1};
      (iv) $p_m, p_{m+1} \notin \Lambda$, to kurs otwarcia nie jest wyznaczony.

W powyższym, niezrealizowane transakcje dla limitu ceny p wyznacza się ze wzoru

$$\mathrm{NR}(p) = \Big| \sum_{c \geqslant p} K_c - \sum_{c \leqslant p} S_c \Big|. \tag{3}$$

Przykład 1. Zlecenia biorące udział w wyznaczaniu kursu otwarcia akcji XYZ z kursem zamknięcia równym 21,00 są zaprezentowane w poniższej tabeli

[2] Kurs otwarcia oznacza pierwszą cenę po której zrealizowana zostanie transakcja kupna-sprzedaży w danym dniu sesyjnym.

Kupno	Limit ceny	Sprzedaż
12	30,00	5
–	20,00	10
5	10,00	10

Załóżmy, że

$$\Lambda = \{10{,}00; 10{,}01; \ldots ; 30{,}00\}.$$

Znajdziemy kurs otwarcia.

Z tabeli wynika, że inwestorzy chcą zakupić $m = 12+5 = 17$ akcji oraz chcą sprzedać $n = 10+10+5 = 25$ akcji. Wówczas ciąg $(p_i)_{i=1}^{42}$ jest następujący

$$p_1 = \ldots = p_{15} = 10,\ p_{16} = \ldots = p_{25} = 20,\ p_{26} = \ldots = p_{42} = 30.$$

Stąd przedział kursów równowagi jest postaci $\mathsf{M} = [p_{17}, p_{18}] = [20{,}00;\ 20{,}00] = \{20{,}00\}$. Zgodnie z punktem pierwszym algorytmu, kurs otwarcia wynosi 20,00, bo $20{,}00 \in \Lambda$.

Zadanie do rozwiązania (14p)

Zlecenia biorące udział w wyznaczaniu kursu otwarcia akcji XYZ z kursem zamknięcia równym 20,05 są zaprezentowane w poniższej tabeli

Kupno	Limit ceny	Sprzedaż
200	20,06	–
600	20,05	–
100	20,04	3 000
400	20,03	–
2 500	20,02	400
–	20,01	500

Zakładamy, że $\Lambda = \{19{,}50; 19{,}51; \ldots ; 20{,}49; 20{,}50\}$. Posługując się wyżej wprowadzonymi oznaczeniami, wyznacz:

1. m;
2. p_m oraz p_{m+1};
3. przedział kursów równowagi;
4. $\mathrm{NR}(p)$ dla $p \in \{20{,}01; 20{,}02; 20{,}03; 20{,}04; 20{,}05; 20{,}06\}$;
5. kurs otwarcia.

ZADANIE NR 7 (15p)

Matematycy często się spierają, czy zero jest liczbą naturalną, czy może liczby naturalne powinny rozpoczynać się od jedynki. Oczywiście chodzi tylko o to, które podejście jest ładniejsze i wygodniejsze, bo poprawne są oba, o ile są prawidłowo zdefiniowane i konsekwentnie stosowane.

„Liczbą naturalną wyrażała się liczba landrynków w puszce, z której częstował mnie mój dziadek" rzucił w korytarzu Instytutu do kolegi prof. Nojmański. To akurat nie był najlepszy przykład, bo puszka dziadka nigdy nie była pusta, ale jego rozmówca, prof. Matematysiak tego nie wiedział. Tak się zdenerwował, że popełnił błąd, który każdemu z nas się kiedyś przydarzył: „Zero nie jest naturalną **cyfrą** i nigdy nie było!" odpowiedział. A potem, mimo śmiechu kolegi, pomyślał: „może to nie jest taki głupi pomysł, przecież jeśli zrezygnuję z używania **cyfry** «0» to może nie uda się zapisać w naturalny sposób **liczby** zero".

Zaczął się zastanawiać: liczby od 1 do 9 to łatwo, 11 będzie oznaczać w nowym systemie liczbę $1 \cdot 9 + 1$, czyli dziesięć, 19 — to liczba $1 \cdot 9 + 9$, czyli osiemnaście, 21 to dziewiętnaście, 111 to dziewięćdziesiąt jeden. A dalej? A jak zakodować tysiąc? A w jaki sposób wykonywać działania w nowym systemie liczbowym? Muszę to przemyśleć — powiedział do zapatrzonego Nojmańskiego (prof. Matematysiak nie zdawał sobie sprawy, że gdy nad czymś się zastanawia, to mówi głośno do siebie). Może poprosić o pomoc jakiegoś młodego człowieka? I tu, drogi Czytelniku, pojawia się Twoje zadanie.

Warto zwrócić uwagę, że w systemie prof. Matematysiaka:

- koduje się wyłącznie liczby całkowite, dodatnie;
- używa się cyfr od „1" do „9";
- kolejną liczbę naturalną uzyskuje się zmieniając cyfrę jedności (na odpowiadającą liczbie o jeden większej), a gdy wynosi ona „9" zapisuje się „1" i zamienia kolejną, najmniej znaczącą, cyfrę, wykonując te operacje do skutku, od prawej do lewej strony. W razie gdyby konieczne było zwiększenie liczby cyfr, dopisuje się cyfrę „1" na najbardziej znaczącej pozycji (tzn. po lewej stronie), zatem
- dowolna liczba $(n+1)$-cyfrowa jest większa od każdej liczby n-cyfrowej.

System nie jest więc bardzo skomplikowany, wygląda analogicznie do zwykłego systemu dziesiętnego, jedyne co utrudnia kodowanie to ten brak cyfry „0". Liczby w systemie prof. Matematysiaka będziemy oznaczać przez x_M, gdzie x jest ciągiem cyfr (bez zer). Dla przykładu

- $11_M = 10$
- $51_M = 46$
- $111_M = 91$
- $121_M = 100$
- $1331_M = 1000$
- $6543_M = 4818$
- $999999_M = 597870$

Problemy do rozwiązania (15p)

Dokonać zamiany na system dziesiętny:

(a) 1234_M

(b) 9291_M

(c) 1991_M

Dokonać zamiany na system prof. Matematysiaka:

(d) 1234

(e) 3291

(f) 7991

Wykonać działania w systemie prof. Matematysiaka:

(g) $6543_M + 2111_M$

(h) $1293_M + 3216_M$

(i) $7991652_M + 117327_M$

(j) $6531792_M - 1239382_M$

(k) $1623_M \cdot 123_M$