IX Wojewódzki Konkurs Matematyczny "W Świecie Matematyki"
im. Prof. Włodzimierza Krysickiego
Etap pierwszy - 20 lutego 2017 r.

W zadaniach przyjmujemy, że $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

W zadaniu 26 przyjmujemy, że wektor $\overrightarrow{[0, 0]}$ na płaszczyznie jest równoległy oraz prostopadły do każdego innego wektora.

1. Załóżmy, że n jest pewną liczbą naturalną. Weźmy pod uwagę dzielniki n różne od 1 i od n. Wiadomo, że największy z tych dzielników jest 45 razy większy od najmniejszego z nich.

   [ ] Nie istnieje liczba naturalna n spełniająca podane warunki.
   [ ] Istnieje dokładnie jedna liczba naturalna spełniająca podane warunki.
   [ ] Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych spełniających podane warunki.

2. Cyfrą jedności pewnej liczby trzycyfrowej jest 2. Jeżeli cyfrę tę przeniesiemy na początek tej liczby, to otrzymamy liczbę trzycyfrową o 36 mniejszą od wyjściowej. Wówczas

   [ ] suma cyfr tej liczby wynosi 10;
   [ ] istnieje więcej niż jedna liczba trzycyfrowa spełniająca warunki zadania;
   [ ] każda liczba trzycyfrowa spełniająca warunki zadania jest podzielna przez 4.

3. Dana jest funkcja $f : (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to (0, \infty)$ określona wzorem $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Poprowadzono prostą równoległą do osi Ox, która przecięła wykres funkcji f w punktach A i B. Niech $C = (3, -1)$. Wówczas pole trójkąta ABC

   [ ] może być mniejsze od 1;
   [ ] jest na pewno większe bądź równe 2;
   [ ] jest na pewno mniejsze od 1000.

4. Prawdziwe jest zdanie:

   [ ] Liczba wszystkich całkowitych nieujemnych rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ wynosi $\binom{18}{3}$.
   [ ] Liczba wszystkich liczb dziewięciocyfrowych, które w zapisie dzisiętnym tworzą ciąg ściśle malejący jest parzysta.
   [ ] Liczba wszystkich liczb dziewięciocyfrowych, które w zapisie dziesiętnym tworzą ciąg ściśle rosnący wynosi $\binom{9}{3}$.

5. Rzucamy 19 razy kostką dwudziestościenną, której ścianki są ponumerowane liczbami naturalnymi od 1 do 20. Wówczas

   [ ] prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma uzyskanych oczek jest równa 90 jest takie samo jak prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma uzyskanych oczek jest równa 100;
   [ ] jeżeli zapisujemy uzyskane wyniki w kolejności wykonanych rzutów, to możemy uzyskać 19^{20} różnych wyników;
   [ ] jeżeli zapisujemy uzyskane wyniki w kolejności wykonanych rzutów, to możemy uzyskać 20^k różnych wyników takich, że żadna z wyrzuconych liczb nie jest większa od k, gdzie $k \in \{1, 2, ..., 20\}$.

6. Prawdziwa jest równość

   [ ] $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}=1;$

   [ ] $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}=1;$

   [ ] $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log 2^n}{n}=0.$

7. Liczba $\cos\frac{\pi}{32}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{4}$ jest

   [ ] równa $\frac{1}{4}$;

   [ ] wymierna;

   [ ] mniejsza od $\frac{1}{2}$.

8. Funkcje f i g są określone w zbiorze $\mathbb{R}$, a w pewnych punktach $a,b\in\mathbb{R}$ spełniają warunki $f(a)<g(a)$ oraz $f(b)>g(b)$. Wówczas

   [ ] jeżeli $a<b$, to istnieje punkt $c\in(a,b)$ taki, że $f(c)=g(c)$;

   [ ] jeżeli $a=0$, to $f(x)-g(x)\geq 0$ dla wszystkich $x>0$;

   [ ] funkcja f jest ciągła na przedziale (a,b).

9. Ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)$ dla $n\geq 2$ jest

   [ ] ograniczony;

   [ ] monotoniczny;

   [ ] zbieżny do pewnej liczby rzeczywistej.

10. Jeżeli W jest wielomianem stopnia piątego o współczynnikach całkowitych, a $W(0)$ jest liczbą nieparzystą, to W nie ma pierwiastków

    [ ] nieparzystych;

    [ ] parzystych;

    [ ] rzeczywistych.

11. Jeżeli p i q są zdaniami logicznymi, to tautologią jest zdanie:

    [ ] $(p\wedge\sim q)\Longrightarrow q;$

    [ ] $q\Longrightarrow(p\vee q);$

    [ ] $(p\vee q)\iff(p\wedge(q\vee\sim q));$

    [ ] $((\sim p)\vee q)\Longrightarrow(p\wedge\sim q).$

12. Weźmy dowolny czworokąt C_1, zaś czworokąt C_2 utwórzmy w taki sposób z czworokąta C_1, że zmniejszmy miary dwóch przeciwległych kątów wewnętrznych czworokąta C_1 łącznie o α stopni, zwiększając jednocześnie miary dwóch pozostałych kątów wewnętrznych C_1 łącznie o α stopni. Wówczas suma miar wszystkich kątów zewnętrznych

    [ ] nie zmieni się;

    [ ] zmniejszy się o α stopni;

    [ ] zwiększy się o α stopni;

    [ ] zwiększy się o 2α stopni.

13. Prawdziwe jest zdanie:

[ ] Istnieje zbiór zawierający wszystkie zbiory;

[ ] Liczba wszystkich podzbiorów zbioru k-elementowego wynosi 2^{k-1};

[ ] Moc zbioru $\{\emptyset\}$ jest równa mocy zbioru $\emptyset$;

[ ] Moc zbioru liczb wymiernych jest większa od mocy zbioru liczb naturalnych.

14. Zbiorem nieograniczonym jest zbiór wszystkich rozwiązań nierówności

[ ] $2^x < x^2$;

[ ] $2^x > x^{100}$;

[ ] $x \leq [x]$, gdzie $[x]$ oznacza całość z liczby x, tzn. największą liczbę całkowitą mniejszą bądź równą liczbie x;

[ ] $x^2 - 1 < |x - 1|$.

15. Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d różnych od zera prawdziwa jest nierówność

[ ] $|\max\{a, b\} - \max\{c, d\}| \leq |a - c| + |b - d|$;

[ ] $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > \frac{1}{2}$;

[ ] $|a - b + c| < |a| - |b| + |c|$;

[ ] $\frac{a+b+c+d}{4} < \frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}$.

16. Prawdziwe jest zdanie:

[ ] Nie istnieje wielokąt wypukły o dokładnie 16 przekątnych.

[ ] Nie istnieje wielokąt wypukły o dokładnie 15 przekątnych.

[ ] Nie istnieje wielokąt wypukły o dokładnie 14 przekątnych.

[ ] Nie istnieje wielokąt wypukły o dokładnie 13 przekątnych.

17. O ciągu (x_n) dla $n \geq 1$ wiadomo, że ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = 3^{x_n}$ dla $n \geq 1$ jest geometryczny o ilorazie równym 27. Wówczas

[ ] ciąg (x_n) jest arytmetyczny;

[ ] ciąg (x_n) jest geometryczny;

[ ] jeżeli dodatkowo założymy, że suma dziesięciu początkowych wyrazów ciągu (x_n) jest równa 145, to $x_1 = 1$;

[ ] ciąg $\left(\frac{x_n}{a_n}\right)$ jest zbieżny do pewnej liczby rzeczywistej dla dowolnego $x_1 \in \mathbb{R}$.

18. Niech $NWD\,(a, b)$ oznacza największy wspólny dzielnik liczb naturalnych a i b. Wówczas:

[ ] $NWD\left(24!, 24^8\right) = 2^{21} \cdot 3^8$;

[ ] jeśli a i b są nieparzyste, to $NWD\left((a+b)^m, (a-b)^m\right) = 2^m$ dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$;

[ ] jeśli a i b są nieparzyste i względnie pierwsze, to $NWD\left((a+b)^m, (a-b)^m\right) = 2^{m-1}$ dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$;

[ ] $NWD\left(254678914^{37}, 10^{43}\right) = 2^{43}$.

19. Prawdziwe jest zdanie:

[ ] Jeżeli przekrój osiowy stożka jest trójkątem równoramiennym o stosunku długości ramienia do długości podstawy równym $3 : 4$, to tworząca stożka tworzy z jego wysokością kąt α taki, że $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

[ ] Jeżeli powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu jest półkolem o promieniu 12 cm, to podstawa tego stożka jest kołem o średnicy 12 cm.

[ ] Jeżeli graniastosłup ma $2n + 6$ wierzchołków, to liczba wszystkich krawędzi tego graniastosłupa jest równa $3n + 9$.

[ ] Objętość kuli stycznej do wszystkich ścian sześcianu jest większa niż $\frac{2}{3}$ objętości sześcianu.

20. Prawdopodobieństwo, że w dobrze potasowanej talii 52 kart wszystkie cztery asy sąsiadują ze sobą (nie są rozdzielone innymi kartami) wynosi

[ ] $\frac{4!}{50 \cdot 51 \cdot 52}$;

[ ] $\binom{52}{4}^{-1}$;

[ ] $\frac{4}{52}$;

[ ] $\binom{52}{3}^{-1}$.

21. Równanie $\sin^2 x = \sin x$ ma w przedziale $[0, \pi]$

[ ] dokładnie jedno rozwiązanie;

[ ] dokładnie jedno rozwiązanie wymierne;

[ ] co najmniej dwa rozwiązania;

[ ] co najmniej dwa rozwiązania wymierne.

22. Prawdziwa jest równość

[ ] $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$;

[ ] $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} = 1$;

[ ] $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{ctg} x = 1$;

[ ] $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\operatorname{tg} x}{x - \pi} = 1$.

23. Zbiór wartości funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = \sqrt{112} \sin x + 12 \cos x$

[ ] jest zawarty w przedziale $[-16, 16]$;

[ ] zawiera przedział $[-10, 10]$;

[ ] jest przedziałem;

[ ] jest zbiorem symetrycznym względem 0.

24. Równanie $\left| \left| x^2 - 2x + 3 \right| - 2 \right| = a$ ma pięć różnych rozwiązań, jeżeli

[ ] $a = 1$;

[ ] $a = 2$;

[ ] $a = 6$;

[ ] $a = 10$.

25. Zbiór punktów różniczkowalności funkcji $f : (-2, 2) \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = \left|x^2 - 1\right|$

[ ] jest wypukły;

[ ] jest otwarty;

[ ] zawiera punkt 2;

[ ] zawiera punkt 0.

26. Dane są dwa wektory na płaszczyznie $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ oraz dwie liczby rzeczywiste x i y. Wiadomo ponadto, że $x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{v} + y\overrightarrow{u}$. Wówczas

[ ] wektor $\overrightarrow{u}$ jest równoległy do wektora $\overrightarrow{v}$;

[ ] jeżeli dodatkowo założymy, że $x \neq y$, to wektor $\overrightarrow{u}$ jest równoległy do wektora $\overrightarrow{v}$;

[ ] jeżeli dodatkowo założymy, że $x = y$, to wektor $\overrightarrow{u}$ jest równoległy do wektora $\overrightarrow{v}$;

[ ] wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ mogą być do siebie prostopadłe.

27. Dwa wielościany wypukłe W_1 i W_2 mają tę samą liczbę krawędzi, a różną liczbę wierzchołków. Wówczas

[ ] wielościany te mogą być podobne;

[ ] wielościany te mogą mieć tę samą liczbę ścian;

[ ] wielościany te muszą być graniastosłupami;

[ ] żaden z tych wielościanów nie może być ostrosłupem.

28. Zbiorem rozwiązań nierówności $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} + \log_x x^3 < 0$ jest

[ ] zbiór pusty;

[ ] zbiór liczb rzeczywistych;

[ ] zbiór ograniczony;

[ ] $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$, gdzie $k \in \mathbb{C}$.

29. Dany jest ciąg (a_n) dla $n \geq 1$ o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{1}{(\cos c + \sin c)^n}$, gdzie $c \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Wówczas

[ ] dla dowolnego c ciąg (a_n) jest geometryczny;

[ ] dla dowolnego c ciąg (a_n) jest zbieżny;

[ ] istnieje wartość c, dla której (a_n) jest ciągiem arytmetycznym;

[ ] dla dowolnego c ciąg (a_n) jest ściśle malejący.

30. Niech α będzie kątem między dwoma ścianami czworościanu foremnego. Wówczas:

[ ] $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$;

[ ] $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$;

[ ] $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}$;

[ ] $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$.

IX Wojewódzki Konkurs Matematyczny „W świecie Matematyki”
im. Prof. Włodzimierza Krysickiego
Etap pierwszy - 20 lutego 2017 r.

KARTA ODPOWIEDZI

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30