XIV Wojewódzki Konkurs Matematyczny "W Świecie Matematyki"

im. Prof. Włodzimierza Krysickiego

Etap drugi - 10 marca 2023 r.

Maksymalna liczba punktów do zdobycia: 50.

1. Drugi etap Konkursu składa się z 5 zadań z treścią, w tym 3 zadań z matematyki wyższej.
2. Maksymalna liczba punktów do zdobycia za każde z zadań podana jest przy jego numerze.
3. Zabrania się korzystania z korektora.
4. Dozwolone jest korzystanie z **Zestawu wybranych wzorów matematycznych** wydanych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielnej pracy uczestnika Konkursu (poza korzystaniem z tablic matematycznych wymienionych w punkcie 4.) zostaje on wykluczony z Konkursu.

ZADANIE NR 1 (5p)

Wielomian $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ spełnia warunki:
1) $a \neq 0$
2) liczby -1 oraz 2 są jego jedynymi pierwiastkami
3) wykres wielomianu W przechodzi przez punkt $(0, -2)$.
(a) Wykazać, że $b = 0$ lub $c = 0$.
(b) Czy styczne do wykresu wielomianu W wystawione w punktach $\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}, W(\frac{1-\sqrt{7}}{3})\right)$ oraz $\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{3}, W(\frac{-1+\sqrt{7}}{3})\right)$ są równoległe?

ZADANIE NR 2 (4p)

W półkulę o promieniu R wpisano stożek, którego wierzchołek leży w środku kuli, a podstawa jest jest równoległa do podstawy półkuli.
(a) Przedstaw objętość tego stożka jako funkcję kąta nachylenia tworzącej do jego płaszczyzny podstawy.
(b) Wyznacz długość promienia podstawy stożka, przy którym jego objętość jest maksymalna i oblicz tę objętość.

ZADANIE NR 3 (12p)

Równanie funkcyjne to równanie, w którym występują funkcje i zmienne, a niewiadomą jest funkcja. Zmienne zazwyczaj są dowolnymi elementami dziedziny. Rozwiązanie równania funkcyjnego polega na wyznaczeniu wszystkich funkcji, które je spełniają. W tym celu stosujemy różnorakie podstawienia wartości zmiennych występujących w równaniu.
Przykład. Załóżmy, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia równanie funkcyjne:

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

(a) Jeśli wiadomo, że $f(1) = 3$, to ile wynosi $f(3)$?
Rozwiązanie: Korzystając z równania (1) mamy

$$f(2) = f(1+1) = f(1)f(1) = 9$$

i dalej

$$f(3) = f(1+2) = f(1)f(2) = 27.$$

(b) Jeśli $f(1) = 0$, to ile wynosi $f(7)$?
Rozwiązanie: Podobnie jak poprzednio, korzystając z równania (1) mamy

$$f(7) = f(6+1) = f(6)f(1) = 0.$$

Uważna osoba zauważy, że w tym przypadku można wykazać, że funkcja f jest tożsamościowo równa zero.

Załóżmy, że S jest funkcją rzeczywistą dwóch zmiennych rzeczywistych, spełniającą następujące równanie funkcyjne:

$$S(x,y) \cdot S(y,z) = S(x,z) \tag{2}$$

dla wszystkich $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Przykładami funkcji spełniającej (2) są

$$S(x,y) = \frac{x^2+1}{y^2+1}$$

oraz

$$S(x,y) = \frac{|y|+4}{|x|+4}.$$

Zadania do wykonania:
(a) Jeśli wiadomo, że S spełnia równanie (2), $S(1,2) = 3$ oraz $S(3,2) = \frac{1}{2}$, to ile wynosi $S(2,3)$?
(b) Jeśli wiadomo, że S spełnia równanie (2), $S(1,2) = 0$, to ile wynosi $S(3,4)$?
(c) Załóżmy, że S spełnia równanie (2) i dodatkowo warunek

$$S(x,y) = S(y,x) \tag{3}$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ oraz S nie jest tożsamościowo równa 0. Ile wynosi $S(x,y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$? Pytamy się więc o ogólne rozwiązanie układu równań funkcyjnych (2)-(3).

ZADANIE NR 4 (14p)

Rozkłady prawdopodobieństwa odgrywają ważną rolę w modelach matematycznych opisujących zjawiska losowe. Należy do nich następujący model ryzyka niewypłacalności zakładu ubezpieczeń, w którym wysokość majątku (nadwyżki) ubezpieczyciela $\{U_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ w kolejnych okresach opisana jest następująco:

$$U_n = u + \gamma \cdot n - \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n \in \mathbb{N},$$

gdzie:
$u = U_0 \geqslant 0$ oznacza początkową nadwyżkę ubezpieczyciela,
$\gamma > 0$ oznacza składkę przypadającą na pojedynczy okres (przykładowo: kwartał lub miesiąc),
$\mathbb{N}$ oznacza zbiór dodatnich liczb całkowitych,
X_i oznacza łączną wysokość szkód w i-tym okresie.

Zakładamy, że wysokości szkód w kolejnych okresach $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i modelowane za pomocą nieujemnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie prawdopodobieństwa.

Idea tak sformułowanego modelu nadwyżki ubezpieczyciela polega na równoważeniu ewentualnych wypłat przez zyski pochodzące z napływającej co okres odpowiednio wysokiej składki γ, przy założeniu o odpowiedniej wartości nadwyżki początkowej u.

Dzięki technikom probabilistycznym jesteśmy w stanie obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń związanych z rozważanymi zmiennymi losowymi.

Przykład 1. Rozważmy zmienną losową X typu dyskretnego, która przyjmuje wartości $x_1, x_2, x_3, ...$ (są to tak zwane punkty skokowe albo atomy) z prawdopodobieństwami, odpowiednio, $p_1, p_2, p_3, ...$, które możemy wyrazić za pomocą funkcji prawdopodobieństwa $p_i = P(X = x_i)$, to znaczy p_i jest prawdopodobieństwem przyjęcia przez zmienną losową X wartości x_i. Oczywiście, wszystkie prawdopodobieństwa p_i są nieujemne, a ich suma jest równa 1.

Prawdopodobieństwo przyjęcia przez zmienną losową X wartości z pewnego zbioru A (przykładowo: z ograniczonego albo nie przedziału) można wyrazić następująco:

$$P(X \in A) = \sum_{\{i:\, x_i \in A\}} p_i,$$

to znaczy sumujemy te prawdopodobieństwa, którym odpowiadają atomy należące do zbioru A (przy umowie, że powyższa suma jest równa 0 w przypadku braku takich atomów).

Rozważmy trzypunktowy rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X o funkcji prawdopodobieństwa opisanej następująco:

$$P(X = 1) = 0.1, \quad P(X = 2) = 0.6, \quad P(X = 5) = 0.3.$$

Wówczas, przykładowo, $P(X \in (1, 2]) = P(1 < X \leqslant 2) = p_2 = 0.6$; $P(X \in (1, 2)) = 0$ i $P(X \in (-1, 7]) = p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Zadania do wykonania

(a) O technicznej ruinie ubezpieczyciela (w rozważanym modelu) mówimy, jeżeli wartość majątku ubezpieczyciela spadnie (po raz pierwszy) poniżej zera (o ile taka sytuacja ma miejsce). Załóżmy, że $\gamma \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz, że wszystkie szkody $X_1, X_2, ...$ mają ten sam rozkład geometryczny o następującej funkcji prawdopodobieństwa:

$$\mathbb{P}(X_1 = n) = q^{n-1} \cdot p, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

gdzie $p \in (0, 1)$ oraz $q = 1 - p$. Wyznaczyć wzór na prawdopodobieństwo ruiny (niewypłacalności) ubezpieczyciela do końca pierwszego okresu.

(b) Załóżmy, że w powyższym modelu ryzyka: rozważanym okresem jest miesiąc z odpowiadającą mu składką $\gamma = 3$ oraz że $u = 1$. Obliczyć prawdopodobieństwo niewypłacalności ubezpieczyciela do końca pierwszego miesiąca jego działalności w przypadku, gdy szkody mają rozkład geometryczny (z poprzedniego zadania) z parametrem $p = 0.5$.

ZADANIE NR 5 (15p)

Definicja 1. *(zbiór rozmyty)*
Niech X będzie niepustym zbiorem. Każdą funkcję $u : X \to [0, 1]$ nazwiemy *zbiorem rozmytym w X*. Dla zbioru rozmytego $u : X \to [0, 1]$ i liczby $\alpha \in \mathbb{R}$, *α-cięciem zbioru u* nazywamy zbiór

$$[u]^\alpha := \{x \in X : u(x) \geqslant \alpha\}$$

Przykład 1. Funkcje

$$\forall_{x \in [0,2]}\ u(x) = \frac{1}{4}x^2$$

oraz

$$v(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \in [0, 1] \\ \frac{1}{2} & \text{dla} \quad x \in (1, 2] \end{cases}$$

są zbiorami rozmytymi w $[0, 2]$. Przykładowe α-cięcia:

$$[u]^{\frac{1}{2}} = \left\{x \in [0, 2] : u(x) \geqslant \frac{1}{2}\right\} = \left\{x \in [0, 2] : \frac{1}{4}x^2 \geqslant \frac{1}{2}\right\} = [\sqrt{2}, 2]$$

$$[v]^{\frac{1}{2}} = \left\{x \in [0, 2] : v(x) \geqslant \frac{1}{2}\right\} = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

Definicja 2. *(suma i iloczyn zbiorów rozmytych)*
Dla zbiorów rozmytych $u : X \to [0,1]$, $v : X \to [0,1]$, definiujemy ich *sumę* $(u \cup v)$ oraz *iloczyn* $(u \cap v)$ następująco:

$$\forall_{x \in X}\ (u \cup v)(x) := \max\{u(x), v(x)\}$$

oraz

$$\forall_{x \in X}\ (u \cap v)(x) := \min\{u(x), v(x)\}$$

Definicja 3. *(zbiór prosty)*
Powiemy, że zbiór rozmyty $u : X \to [0,1]$ jest *prosty*, jeżeli jest funkcją charakterystyczną pewnego podzbioru $A \subset X$, tj. jest postaci

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \in A \\ 0 & \text{dla} \quad x \in X \setminus A \end{cases}$$

Zbiór prosty będący funkcją charakterystyczną zbioru A oznaczać będziemy symbolem u_A.

Zadania do wykonania
(a) Rozważmy nastepujące zbiory rozmyte u, v na $[-1,1]$:

$$\forall_{x \in [-1,1]}\ u(x) = x^2$$

$$\forall_{x \in [-1,1]}\ v(x) = \begin{cases} 1 - 2|x| & \text{dla} \quad x \in \Big[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big) \\ \frac{1}{2} & \text{dla} \quad x \in \Big[\frac{1}{2}, 1\Big] \\ x + 1 & \text{dla} \quad x \in \Big[-1, -\frac{1}{2}\Big) \end{cases}$$

Wyznacz cięcia $[u]^{\frac{1}{3}}$ oraz $[v]^{\frac{1}{3}}$, oraz wzór zbioru $(u \cup v)$

(b) Niech $A, B \subset X$. Udowodnij, że $(u_A \cup u_B) = u_{(A \cup B)}$ oraz $(u_A \cap u_B) = u_{A \cap B}$

(c) Niech u, v, w będą zbiorami rozmytymi w X. Udowodnij, że $(u \cup (v \cap w)) = ((u \cup v) \cap (u \cup w))$.

(d) Niech $f : [0,1] \to \Big[0, \frac{1}{2}\Big]$, $g : [0,1] \to \Big[\frac{1}{2}, 1\Big]$ będą funkcjami ciągłymi spełniającymi następujące warunki:

- f jest ściśle rosnąca, $f(0) = 0$ oraz $f(1) = \frac{1}{2}$;
- g jest ściśle malejąca, $g(0) = 1$ oraz $g(1) = \frac{1}{2}$.

Pokaż, że istnieje zbiór rozmyty u na $[0,1]$, dla którego

$$[u]^\alpha = [f(\alpha), g(\alpha)]$$

dla każdego $\alpha \in [0,1]$.