IX Wojewódzki Konkurs Matematyczny "W Świecie Matematyki"

im. Prof. Włodzimierza Krysickiego

Etap drugi - 21 lutego 2017 r.

Maksymalna liczba punktów do zdobycia: 80.

1. Drugi etap Konkursu składa się z 4 zadań z treścią oraz 3 zadań z matematyki wyższej - do zadań tych dołączone są definicje, twierdzenia i przykłady pomocne w ich rozwiązywaniu.
2. Maksymalna liczba punktów do zdobycia za każde z zadań podana jest przy jego numerze.
3. Zabrania się korzystania z korektora.
4. Dozwolone jest korzystanie z „Zestawu wybranych wzorów matematycznych" wydawanych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną.
5. Zabrania się korzystania z kalkulatora.
6. W przypadku stwierdzenia niesamodzielnej pracy uczestnika Konkursu (poza korzystaniem z tablic matematycznych wymienionych w punkcie 4) zostaje on wykluczony z Konkursu.

Zadanie 1 (10 punktów)

Zaokrąglonym o $p\%$ kwadratem, gdzie $p \in [0, 100]$, nazywamy figurę geometryczną, która powstaje w wyniku wykonania następującego algorytmu:

(i) Z każdego z czterech boków kwadratu usuwamy dwa odcinki zawarte w tym boku, których jeden koniec znajduje się w wierzchołku kwadratu, zaś jego długość wynosi $\frac{p}{2}\%$ długości boku kwadratu. W ten sposób otrzymujemy cztery odcinki będące częścią wyjściowego kwadratu.

(ii) Łączymy ze sobą łukiem (wycinkiem okręgu) cztery pary najbliższych końców odcinków (stanowiących wyjściowo części sąsiednich boków).

W ten sposób otrzymujemy zaokrąglony o $p\%$ kwadrat. W szczególnym przypadku zaokrąglony o 0% kwadrat jest kwadratem, a zaokrąglony o 100% kwadrat jest kołem. Znaleźć obwód i pole powierzchni zaokrąglonego o $p\%$ kwadratu o boku długości a. Odpowiedź podać jako funkcje zmiennych p i a.

Zadanie 2 (10 punktów)

W dwóch urnach znajduje się jednakowa liczb kul. Kule te są całe białe lub całe czarne. Po kolei z każdej z urn losujemy ze zwracaniem n kul, gdzie $n > 2$. Wiadomo, że prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu n razy kuli białej z pierwszej urny równe jest prawdopodobieństwu wylosowania z urny drugiej n razy kuli czarnej lub n razy kuli białej. Podać wszystkie możliwe wartości n oraz możliwe zawartości urn pierwszej i drugiej.

Zadanie 3 (10 punktów)

Znaleźć równanie krzywej, która składa się z punktów równoodległych od punktu $(-4, 0)$ oraz okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 4$.

Zadanie 4 (10 punktów)

(a) Dla jakich wartości rzeczywistych m wielomian $x^3 + y^3 + z^3 + mxyz$ jest podzielny przez $x + y + z$?

(b) Wykazać, że jeśli równanie $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste, to $p^2 \geq 3q$.

Zadanie 5 (13 punktów)

Definicja 1. Relacją dwuargumentową w zbiorze X nazywamy dowolny podzbiór $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ (tj. dowolny zbiór par uporządkowanych o poprzednikach i następnikach ze zbioru X). W dalszej części będziemy mówili tylko o relacjach dwuargumentowych nazywając je dla prostoty **relacjami**.

Przykład. Klasycznie rozumiana nierówność $\leq$ jest relacją w zbiorze $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$. Wobec przyjętej Definicji 1

$$\leq = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x \leq y\}$$

(oczywiście utożsamiamy zapis $(x, y) \in \leq$ z zapisem $x \leq y$).

Definicja 2. Relację $\mathcal{R}$ w zbiorze X nazywamy **relacją częściowego preporządku**, jeśli jest:

- **zwrotna**, tj. $x\mathcal{R}x$ dla każdego $x \in X$;
- **przechodnia**, tj. dla wszystkich $x, y, z \in X$ jeśli $x\mathcal{R}y$ i $y\mathcal{R}z$, to $x\mathcal{R}z$.

Przykład. Nierówność $\leq$ w zbiorze $\mathbb{N}$ jest relacją częściowego preporządku. Istotnie:

- oczywiście dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $n \leq n$;
- oczywiście, jeśli $n, m, k \in \mathbb{N}$ oraz $n \leq m$ i $m \leq k$, to $n \leq k$.

Definicja 3. Relację częściowego preporządku $\mathcal{R}$ w zbiorze X nazywamy **relacją częściowego porządku** jeśli jest **słabo-antysymetryczna**, tj. dla $x, y \in X$ jeśli $x\mathcal{R}y$ oraz $y\mathcal{R}x$, to $x = y$.

Przykład. Nierówność $\leq$ w zbiorze $\mathbb{N}$ jest relacją częściowego porządku. Istotnie, wiemy już, że jest częściowym preporządkiem oraz oczywiście dla $n, m \in \mathbb{N}$ jeśli $n \leq m$ oraz $m \leq n$, to $n = m$.

Definicja 4. Symbolem $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ oznaczamy zbiór wszystkich funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Pamiętając, że zwyczajowo funkcje o dziedzinie $\mathbb{N}$ nazywa się **ciągami**, to zbiór $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ jest, innymi słowy, zbiorem wszystkich ciągów o wyrazach będących liczbami naturalnymi.

Definicja 5. W zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ zdefiniujmy relację $\leq^*$ w następujący sposób: dla $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ powiemy, że $f \leq^* g$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $f(n) \leq g(n)$ dla wszystkich $n \geq k$ (tj. od pewnego miejsca, oznaczonego numerem k, wyrazy ciągu f są mniejsze lub równe odpowiednim wyrazom ciągu g).

Przykład. (a) dla $f = (3, 2, 1, 2, 2, 2, 2, ...), g = (1, 1, 1, 3, 2, 3, 2, ...)$ mamy, że $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ oraz $f \leq^* g$ ponieważ dla $k = 3$ i $n \geq 3$ mamy $f(n) \leq g(n)$;

(b) dla $f = (1,2,1,2,1,2,...), g = (2,1,2,1,2,1,...)$ mamy, że $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ oraz $f \not\leq^* g$ i $g \not\leq^* f$ (mówimy, że elementy f i g są **nieporównywalne**).

Twierdzenie 1. Relacja $\leq^*$ w zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ jest relacją częściowego preporządku.

Definicja 6. Niech $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Powiemy, że zbiór ten jest **ograniczony z góry**, jeśli istnieje $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ taka, że dla wszystkich $g \in A$ mamy $g \leq^* f$.

Przykład. Zbiór $A = \{f, g\}$ (gdzie f, g są z Przykładu (a)) jest ograniczony z góry. Istotnie dla $h = (3,3,3,...) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ mamy, że $f \leq^* h$ oraz $g \leq^* h$.

Zadania do wykonania

Wszystkie poniższe zadania należy rozwiązać osobno.

1. (2 punkty) Wykaż, że relacja $\leq^*$ w zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ **nie** jest relacją częściowego porządku, tj. że **nie** jest słabo-antysymetryczna.
2. (3 punkty) Wykaż, że dowolny skończony zbiór $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ jest ograniczony z góry.
3. (3 punkty) Wykaż, że zbiór $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ składający się ze wszystkich ciągów stałych jest ograniczony z góry.
4. (6 punktów) Wykaż, że dla dowolnego $A = \{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (tj. dla dowolnego przeliczalnego podzbioru zbioru $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$) zbiór A jest ograniczony z góry.

Zadanie 6 (14 punktów)

Definicja 7. Niech $n \in \mathbb{N}$. **Przestrzenią kartezjańską** $\mathbb{R}^n$ nazywamy zbiór

$$\mathbb{R}^n := \{(v_1, ..., v_n) : v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}\}.$$

Elementy $\mathbb{R}^n$ nazywamy **wektorami**. Jeżeli $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, to **normą wektora** v nazywamy liczbę:

$$||v|| := \sqrt{v_1^2 + ... + v_n^2}.$$

Przykład. (1) Płaszczyzna XY może być utożsamiana z przestrzenią kartezjańską $\mathbb{R}^2$. Istotnie, każdy punkt płaszczyzny v ma dwie współrzędne x, y. Możemy więc zapisać $v = (x, y)$. W takim przypadku, norma wektora $||v||$ może być interpretowana jako odległość punktu v od początku układu współrzędnych.
Np.

$$||(2, 1)|| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

(2) Przestrzeń trójwymiarowa XYZ może być utożsamiona z przestrzenią kartezjańską $\mathbb{R}^3$. Istotnie, każdy punkt v przestrzeni XYZ ma trzy współrzędne x, y, z. Możemy więc zapisać $v = (x, y, z)$. W takim przypadku, norma wektora $||v||$ również może być interpretowana jako odległość punktu v od początku układu współrzędnych.
Np.

$$||(-2, 0, 3)|| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

Definicja 8. W przestrzeni kartezjańskiej $\mathbb{R}^n$ wprowadźmy działania **dodawania wektorów** i **mnożenia wektora przez liczbę**: jeżeli $v = (v_1, ..., v_n), w = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{R}^n$ oraz $a \in \mathbb{R}$, to definujemy:

$$v + w := (v_1 + w_1, ..., v_n + w_n),$$

$$av := (av_1, ..., av_n).$$

Przykład.

$$(2, 3, 4, 1) + (-2, 3, 1, 0) = (0, 6, 5, 1),$$

$$3(-1, 2, 0, 1) = (-3, 6, 0, 3).$$

Uwaga. Dodawanie wektorów możemy rozszerzyć na większą ich liczbę, np. dla $v = (v_1, ..., v_n),\ w = (w_1, ..., w_n),\ u = (u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$, definiujemy:

$$v + w + u := (v_1 + w_1 + u_1, ..., v_n + w_n + u_n).$$

Definicja 9. Niech $v = (v_1, ..., v_n), w = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{R}^n$. **Iloczynem skalarnym** wektorów v, w nazywamy liczbę:

$$< v|w >:= v_1w_1 + ... + v_nw_n.$$

Przykład. Dla $v = (1, 2, 3, 0), w = (0, -1, 2, 1)$, mamy

$$< v|w >= 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 4.$$

Twierdzenie 2. (podstawowe własności iloczynu skalarnego)
Niech $v, w, u \in \mathbb{R}^n$ oraz $a \in \mathbb{R}$. Wówczas:

(i) $< v|w >=< w|v >$;

(ii) $< v + u|w >=< v|w > + < u|w >$;

(iii) $< v|w + u >=< v|w > + < v|u >$;

(iv) $< av|w >=< v|aw >= a < v|w >$;

(v) $< v|v >= ||v||^2$.

Definicja 10. (1) Powiemy, że wektory $v, w \in \mathbb{R}^n$ są **prostopadłe**, jeżeli iloczyn skalarny $< v|w >= 0$. Piszemy wtedy $v \perp w$.
(2) Powiemy, że wektory $v, w \in \mathbb{R}^n$ są **równoległe**, jeżeli dla pewnego $a \in \mathbb{R}$, $v = aw$ lub $w = av$. Piszemy wtedy $v \parallel w$.

Uwaga. W przypadku płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ i przestrzeni $\mathbb{R}^3$, prostopadłość wektorów v, w oznacza prostopadłość odpowiednich odcinków zaczepionych w początku układu współrzędnych i o końcach w punktach, odpowiednio, v, w. Np. wektory $(1, 1)$ i $(-1, 1)$ są prostopadłe w $\mathbb{R}^2$.
Podobnie można interpretować zdefiniowane pojęcie równoległości. Np. wektory $(1, 1)$ i $(-2, -2)$ są równoległe.

Twierdzenie 3. (Twierdzenie Pitagorasa)
Niech $v, w \in \mathbb{R}^n$ będą prostopadłe. Wówczas:

$$||v + w|| = \sqrt{||v||^2 + ||w||^2}.$$

Dowód. Niech $v, w \in \mathbb{R}^n$ będą prostopadłe. Mamy (poniżej odwołujemy się głównie do warunków z Twierdzenia 2):

$$||v + w||^2 = \{\text{war. (v)}\} = < v + w|v + w > = \{\text{war. (ii)}\} = < v|v + w > + < w|v + w > =$$

$$= \{\text{war. (iii)}\} = < v|v > + < v|w > + < w|v > + < w|w > =$$

$$= \{ \text{ prostopadłość } v, w\} = < v|v > +0 + 0+ < w|w > = \{\text{war. (v)}\} = ||v||^2 + ||w||^2$$

Stąd, wobec nieujemności normy wektorów, mamy

$$||v + w|| = \sqrt{||v||^2 + ||w||^2}$$

$\square$

Zadania do wykonania

1. (2 punkty) Niech $v = (-2, 2, 2, 1),\ u = (0, 1, -3, 4),\ w = (0, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -2) \in \mathbb{R}^4$. Spośród podanych wektorów, wskazać pary wektorów prostopadłych i pary wektorów równoległych. Uzasadnij swój wybór.

2. (2 punkty) Niech $v = (2, \sqrt{2}, -1, 0) \in \mathbb{R}^4$. Wskazać dwa nierównoległe wektory $u, w \in \mathbb{R}^4$ takie, że $v \perp u$ oraz $v \perp w$. Uzasadnij swój wybór.

3. Wykonać **jedno** z poniższych zadań (będących uogólnieniami twierdzenia Pitagorasa):

Wariant (a) za 3 punkty: Niech $v, w, u \in \mathbb{R}^n$ będą parami prostopadłe, tj. $v \perp u,\ v \perp w,\ u \perp w$. Pokazać, że

$$||v + w + u|| = \sqrt{||v||^2 + ||w||^2 + ||u||^2}.$$

Wariant (b) za 5 punktów: Niech $k \in \mathbb{N}$ i niech $v^1, ..., v^k \in \mathbb{R}^n$ będą parami prostopadłe, tj. $v^i \perp v^j$ dla $i, j \in \{1, ..., k\}$, $i \neq j$. Pokazać, że

$$||v^1 + ... + v^k|| = \sqrt{||v^1||^2 + ... + ||v^k||^2}.$$

4. (5 punktów) Niech $w, v \in \mathbb{R}^n$ i załóżmy, że $v \neq (0, ..., 0)$. Pokazać, że w można rozłożyć na sumę dwóch wektorów: prostopadłego do v i równoległego do v. Dokładniej, pokazać, że istnieją wektory $w', w'' \in \mathbb{R}^n$ spełniające następujące warunki:

(i) $w = w' + w''$;

(ii) $w' \parallel v$;

(iii) $w'' \perp v$.

Czy wektory w' i w'' z powyższego przedstawienia są wyznaczone jednoznacznie?

Zadanie 7 (13 punktów)

Definicja 11. Funkcją akumulacji nazywamy niemalejącą funkcję $a : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ taką, że $a(0) = 1$.

Uwaga. Funkcja akumulacji wykorzystywana jest w matematyce finansowej do wyliczania przyszłej wartości, po czasie $t \geq 0$, jednej jednostki monetarnej zainwestowanej w chwili 0. Jednostka, w której mierzymy czas, nazywana jest okresem bazowym - może być to na przykład dzień, miesiąc, kwartał lub rok. W praktyce najczęściej korzysta się z funkcji akumulacji postaci $a(t) = (1+i)^t$ (oprocentowanie składane), wraz z okresem bazowym równym jeden rok, gdzie i jest stopą oprocentowania dla jednego okresu bazowego. Jej działanie opiera się na tym, że odsetki za każdy kolejny okres bazowy doliczane są do kwoty kapitału i pracują na kolejne odsetki. Aby obliczyć wartość przyszłą kwoty $P > 0$ w chwili $t \geq 0$ wystarczy wyznaczyć $P \cdot a(t)$.

Przykład. Rozważmy pięcioletnią inwestycję w banku, który oferuje stopę oprocentowania $i = 5\%$ w skali roku. W chwili 0 wpłacamy na konto kwotę 1000 zł. Zgodnie ze wzorem obliczamy wartość przyszłą:

$$K \cdot a(5) = 1000(1 + 0,05)^5 \approx 1276,28.$$

Wielkość $(1 + i)$ nazywamy czynnikiem akumulującym.

Definicja 12. Dla ustalonej stopy procentowej $i > 0$ wielkość $v = \frac{1}{1+i}$ nazywamy współczynnikiem dyskonta.

Uwaga. Współczynnik dyskonta jest odwrotnością czynnika akumulacyjnego i służy on do wyznaczenia wielkości kapitału P jaki należy wpłacić w chwili 0, by po jednym okresie rozliczeniowym uzyskać kwotę $K > 0$. Kwota P wyznaczana jest w oparciu o zależność

$$P = K \cdot v = \frac{K}{1+i}.$$

Istotnie, jeśli w chwili 0 wpłacimy do banku kwotę $P = \frac{K}{1+i}$, to po jednym okresie rozliczeniowym jej wartość wynosi

$$P \cdot (1+i)^1 = P \cdot (1+i) = \frac{K}{1+i} \cdot (1+i) = K.$$

Definicja 13. Przepływem pieniężnym (*cash-flow*) nazywamy dowolny ciąg (CF_k) dla $k = 0, 1, ..., n$, $n \in \mathbb{N}_0$ (ciąg ten może być skończony lub nie), gdzie CF_k oznacza wartość przepływu pieniężnego w chwili $k \in \{0, 1, ..., n\}$. Jeżeli $CF_k > 0$, to wówczas w chwili k wypłacamy z banku wartość CF_k, zaś jeśli $CF_k < 0$, to wpłacamy od banku wartość $-CF_k$.

Przykład. Rozważmy sytuację, w której pobieramy w chwili $t = 0$ kredyt w wysokości 1000 zł, a następnie spłacamy go w trzech równych ratach wynoszących po 400 zł w chwilach $t = 1, 2, 3$. Wówczas przepływem pieniężnym jest ciąg o wyrazach

$$CF_0 = 1000, CF_1 = -400, CF_2 = -400, CF_3 = -400.$$

Definicja 14. Dla ustalonej stopy procentowej $i > 0$ i ciągu przepływów pieniężnych (CF_k) dla $k = 0, 1, ..., n$, $n \in \mathbb{N}_0$, wartością obecną netto (net present value) inwestycji nazywamy wielkość określoną wzorem

$$NPV\left(i\right) = \sum_{k=0}^{n} v^k \cdot CF_k,$$

gdzie v jest współczynnikiem dyskonta. Zapis $NPV\left(i\right)$ oznacza, że wartość obecna netto inwestycji jest liczona przy stopie procentowej i.

Przykład. Rozważmy ponownie przykład . Załóżmy dodatkowo, że $i = 10\%$. Wówczas $v = \frac{1}{1+0,1} = \frac{1}{1,1} = \frac{10}{11}$ oraz

$$\begin{aligned} NPV\left(i\right) &= \sum_{k=0}^{3} v^k CF_k = v^0 \cdot 1000 + v^1 \cdot (-400) + v^2 \cdot (-400) + v^3 \cdot (-400) \\ &= 1000 - 400 \cdot \frac{10}{11} - 400 \cdot \left(\frac{10}{11}\right)^2 - 400 \cdot \left(\frac{10}{11}\right)^3 \approx 5,26. \end{aligned}$$

Definicja 15. Wewnętrzną stopą zwrotu (internal rate of return) odpowiadającą przepływowi pieniężnemu (CF_k) nazywamy każdą liczbę $IRR > -1$ taką, że $NPV\left(IRR\right) = 0$.

Przykład. Rozważmy ponownie przykład . Aby wyznaczyć wewnętrzną stopę zwrotu z danej inwestycji, należy rozwiązać równanie $NPV\left(IRR\right) = 0$, tzn.

$$1000 - 400v - 400v^2 - 400v^3 = 0,$$

gdzie $v = \frac{1}{1+IRR}$, czyli

$$1000 - \frac{400}{1+IRR} - \frac{400}{(1+IRR)^2} - \frac{400}{(1+IRR)^3} = 0.$$

Rozwiązując powyższe równanie względem IRR (gdzie $IRR > -1$) znajdujemy wewnętrzne stopy zwrotu. Warto zauważyć, że równanie to może mieć więcej niż jedno rozwiązanie, a więc wewnętrzna stopa zwrotu IRR nie musi być wyznaczona jednoznacznie.

Zadania do wykonania

Rozważmy funkcję akumulacji postaci $a\left(t\right) = \left(1+i\right)^t$, gdzie $i > 0$ oraz $t \geq 0$. Rozważmy trzyletnią inwestycję, która generuje następujące przepływy pieniężne: $CF_0 = -432$ zł, $CF_1 = 1740$ zł, $CF_2 = -2300$ zł, $CF_3 = 1000$ zł.

1. (4 punkty) Wiedząc, że jedna z wewnętrznych stóp zwrotu (IRR) jest równa $IRR = 25\%$, wyznaczyć wszystkie wewnętrzne stopy zwrotu.

2. (4 punkty) Wykazać, że funkcja NPV jest funkcją malejącą dla $v \in (0,68; 0,85)$.

3. (5 punktów) Wyznaczyć maksimum funkcji NPV dla $i \in \left[\frac{100}{19}\%; \frac{300}{7}\%\right]$.