XIV Wojewódzki Konkurs Matematyczny "W Świecie Matematyki"
im. Prof. Włodzimierza Krysickiego
Etap pierwszy - 10 marca 2023 r.

Maksymalna liczba punktów do zdobycia: 50**.**

1. Pierwszy etap Konkursu składa się z 20 pytań testowych.

2. Każde z zadań 1-10 składa się z trzech niezależnych od siebie podpunktów. Każde z zadań 11-20 składa się z czterech niezależnych od siebie podpunktów. Do każdego z podpunktów należy udzielić odpowiedzi **TAK** (gdy potwierdzamy prawdziwość rozpatrywanego zdania) lub **NIE** (gdy uznajemy rozpatrywane zdanie za fałszywe), bądź pozostawić pole puste (jeśli nie chcemy odpowiadać na dany podpunkt). Po zakończeniu wypełniania testu, należy nanieść odpowiedzi w **KARCIE ODPOWIEDZI**. Punktacja za każde zadanie jest następująca:

   - 0 **punktów** w przypadku udzielenia co najmniej jednej błędnej odpowiedzi na jeden z podpunktów zadania lub nieudzielenia odpowiedzi na żaden z podpunktów zadania;
   - $n-1$ **punktów** w przypadku, gdy udzieli się poprawnych odpowiedzi na n podpunktów w zadaniu i nie udzieli się żadnej błędnej odpowiedzi na którykolwiek z podpunktów w zadaniu.

3. Zabrania się korzystania z korektora. W przypadku pomyłki w teście odpowiedź należy przekreślić, zaś nową odpowiedź zaznaczyć po lewej stronie miejsca przeznaczonego na odpowiedź.

4. Dozwolone jest korzystanie z "Zestawu wybranych wzorów matematycznych" i kalkulatorów.

5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielnej pracy uczestnika Konkursu zostaje on wykluczony z Konkursu.

Oznaczenia i definicje

Symbolem $\mathbb{R}$ oznaczamy zbiór liczb rzeczywistych.

Symbolem $\mathbb{Q}$ oznaczamy zbiór liczb wymiernych.

Symbolem $\mathbb{Z}$ oznaczamy zbiór liczb całkowitych.

Symbolem $\mathbb{N}$ oznaczamy zbiór liczb naturalnych. Przyjmujemy, że 0 nie jest liczbą naturalną.

Dla liczb rzeczywistych a, b spełniających nierówność $a < b$, przez $[a, b]$ oznaczamy zbiór liczb rzeczywistych x czyniących zadość nierówności $a \leq x \leq b$. Analogicznie definiujemy zbiory $(a, b), (a, b], [a, b)$.

Powiemy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest **ograniczony**, jeśli istnieje taka liczba $M \in \mathbb{R}$, że $|x| \leqslant M$ dla każdego $x \in A$. Powiemy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest **nieograniczony**, jeśli nie jest ograniczony.

Funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy **surjekcją**, jeśli jej zbiorem wartości jest $\mathbb{R}$.

Funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy **różnowartościową**, jeśli $f(x) \neq f(y)$ dla dowolonych różnych x, $y \in \mathbb{R}$.

Funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy **bijekcją**, jeśli jest różnowartościową surjekcją na $\mathbb{R}$.

Niech $D \subset \mathbb{R}$ będzie niepustym zbiorem. Funkcję $f\colon D \to \mathbb{R}$ nazywamy **ograniczoną**, jeśli jej zbiór wartości jest ograniczony. Funkcję $f\colon D \to \mathbb{R}$ nazywamy **nieograniczoną**, jeśli nie jest ograniczona.

Niech $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą funkcjami.

- **Sumą funkcji** f **i** g nazywamy funkcję $f + g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną wzorem
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$
- **Iloczynem funkcji** f **i** g nazywamy funkcję $fg\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną wzorem
$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$
- **Złożeniem funkcji** f **z funkcją** g nazywamy funkcję $g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną wzorem
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Niech X będzie niepustym zbiorem. Dla $n \in \mathbb{N}$ niech $A_n \subset X$. Dla $n_0 \in \mathbb{N}$ definiujemy zbiory $\bigcup_{i=n_0}^{\infty} A_i$, $\bigcap_{i=n_0}^{\infty} A_i$ w następujący sposób:

- $x \in \bigcup_{i=n_0}^{\infty} A_i$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $n \geqslant n_0$, że $x \in A_n$;
- $x \in \bigcap_{i=n_0}^{\infty} A_i$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in A_n$ dla każdego $n \geqslant n_0$.

Dla zbioru X przez $X \times X$ oznaczamy zbiór par uporządkowanych $\{(x, y) : x, y \in X\}$.

Zadanie 1. Oceń prawdziwość zdań.

[ ] Istnieje ciąg liczb niewymiernych zbieżny do liczby wymiernej.

[ ] Granica dowolnego zbieżnego ciągu liczb dodatnich jest liczbą dodatnią.

[ ] Istnieje ciąg liczb dodatnich zbieżny do liczby ujemnej.

Zadanie 2. Określmy działania $+, \cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\| \cdot \| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wzorami

$$\begin{aligned}(a,b) + (c,d) &:= (a+c, b+d),\\ (a,b) \cdot (c,d) &:= (ac - bd, ad + bc),\\ \|(a,b)\| &:= \sqrt{a^2+b^2}.\end{aligned}$$

Oceń, czy poniższe zależności są prawdziwe dla wszystkich $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

[ ] $\|(a,b) + (c,d)\|^2 + \|(a,b) + (-c,-d)\|^2 = 2\big(\|(a,b)\|^2 + \|(c,d)\|^2\big)$;

[ ] $\|(a,b) \cdot (c,d)\|^2 = \|(a,b)\|^2 \|(c,d)\|^2$;

[ ] $|ac + bd| \leq \|(a,b)\| \|(c,d)\|$.

Zadanie 3. Funkcję $\mu : \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$ określoną wzorem:

$$\mu(n) := \begin{cases} 1 & \text{gdy } n = 1,\\ -1 & \text{gdy } n \text{ jest liczbą pierwszą},\\ 0 & \text{gdy } n \text{ jest podzielna przez kwadrat liczby pierwszej},\\ (-1)^k & \text{gdy } n \text{ jest iloczynem } k \text{ różnych liczb pierwszych}, k \geq 2.\end{cases}$$

nazywamy funkcją Möbiusa. Oceń prawdziwość poniższych zdań:

[ ] $\mu(20) = 0$;

[ ] $\mu(30) = 1$;

[ ] dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość $\mu(n)\mu(n+1)\mu(n+2)\mu(n+3) = 0$.

Zadanie 4. Oceń, czy liczba $4^{186} + 4^{184} - 17$:

[ ] jest podzielna przez 20;

[ ] jest podzielna przez 17;

[ ] przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1.

Zadanie 5. Czy wielomian $P(x)$ jest podzielny przez wielomian $W(x) = x^2 - 5x + 6$, jeżeli:

[ ] $P(x) = x^3 + (\sqrt{2} - 5)x^2 + (6 - 5\sqrt{2})x + 6\sqrt{2}$;

[ ] $P(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 12$;

[ ] $P(x) = W(x) + W(x) \cdot (x - 7) + 7$?

Zadanie 6. Dla a, b, $c \in \mathbb{R}$ definiujemy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem $f(x) = ax^2 + b|x| + c$. Oceń prawdziwość zdań.

[ ] Jeśli $b^2 - 4ac \geqslant 0$, to f ma przynajmniej jedno miejsce zerowe.

[ ] Dla dowolnych a, b, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ funkcja f jest nieograniczona.

[ ] Dla dowolnych a, b, $c \in \mathbb{R}$ funkcja f ma co najwyżej dwa miejsca zerowe.

Zadanie 7. Oceń, czy dla dowolnej funkcji $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ ściśle rosnącej na $(0,1)$ prawdziwe są zdania:

[ ] jeśli f jest ciągła, to jest ściśle rosnąca na $[0,1]$;

[ ] jeśli f jest ściśle rosnąca na $\{0\} \cup [1,2]$, to jest ściśle rosnąca na $[0,2]$;

[ ] jeśli $f(\frac{1}{3}) < 0$ i $f(\frac{2}{3}) > 0$, to f ma przynajmniej jedno miejsce zerowe w przedziale $[0,1)$.

Zadanie 8. Oceń, czy dla dowolnej funkcji $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ prawdziwe są zdania:

[ ] jeśli f jest funkcją monotoniczną, to f posiada granicę lewostronną w 1;

[ ] jeśli f jest funkcją monotoniczną, to funkcja $g(x) = \sin(f(x))$ jest monotoniczna;

[ ] jeśli f jest funkcją ciągłą i różnowartościową, to f jest monotoniczna.

Zadanie 9. Definiujemy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem $f(x) = (2+6\sqrt{7})x^2 + (3+\sqrt{7})x + 5 - \sqrt{7}$. Oceń prawdziwość zdań.

[ ] Istnieją dokładnie dwa punkty należące do wykresu funkcji f, których obie współrzędne są liczbami całkowitymi.

[ ] Istnieje dokładnie jeden punkt należący do wykresu funkcji f, którego dokładnie jedna współrzędna jest liczbą całkowitą.

[ ] Suma rzędnych wszystkich punktów należących do wykresu funkcji f o obu współrzędnych wymiernych wynosi $10\frac{2}{9}$.

Zadanie 10. Powiemy, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest **afiniczna**, jeśli wyraża się wzorem $f(x) = ax + b$ dla pewnych a, $b \in \mathbb{R}$. Oceń prawdziwość zdań.

[ ] Iloczyn dowolnych dwóch funkcji afinicznych jest funkcją afiniczną.

[ ] Złożenie dowolnych dwóch funkcji afinicznych jest funkcją afiniczną.

[ ] Złożenie dowolnych dwóch różnowartościowych funkcji afinicznych jest surjekcją.

Zadanie 11. Oceń, czy dla dowolnych zbiorów $X \neq \emptyset$, $A, B, A_1, A_2, A_3, ... \subset X$ prawdziwe są zdania.

[ ] Równość $A \cup B = B$ ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $A \subset B$.

[ ] Równość $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $A \subset X \setminus B$.

[ ] $B \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (B \cap A_i)$.

[ ] $B \cup \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ wtedy i tylko wtedy, gdy $B \subset A_n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 12. Oceń, czy dla dowolnych zbiorów $A, B, C \subset \mathbb{R}$ prawdziwe są zdania.

[ ] Zbiór A jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru ograniczonego $D \subset \mathbb{R}$ zbiór $A \cup D$ jest ograniczony.

[ ] Jeśli $A \cup B$ jest ograniczony, to A jest ograniczony.

[ ] Jeśli A oraz $(C \cap A) \setminus B$ są ograniczone, to C jest ograniczony.

[ ] Jeśli C oraz $(A \cup B) \setminus C$ są ograniczone, to A i B są ograniczone.

Zadanie 13. Dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ niech $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \coloneqq a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$. Oceń prawdziwość poniższych zdań.

[ ] Zbiór $\left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} : n \in \mathbb{N} \right\}$ jest nieograniczony.

[ ] Zbiór $\left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{i}{3^i} : n \in \mathbb{N} \right\}$ jest ograniczony.

[ ] Dla każdego $q \in (0, 1)$ zbiór $\left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} q^i : n \in \mathbb{N} \right\}$ jest ograniczony.

[ ] Zbiór $\left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} q^i : n \in \mathbb{N}, |q| < 1 \right\}$ jest ograniczony.

Zadanie 14. Oceń prawdziwość zdań.

[ ] $(0, 1) = \bigcup_{i=14}^{\infty} [\frac{1}{i}, 1 - \frac{1}{i}]$.

[ ] $(-1, 1] = \bigcup_{i=1}^{\infty} (-\frac{1}{i}, 1 + \frac{1}{i})$.

[ ] $(-\infty, 1) = \bigcup_{i=2}^{\infty} [-i^3 + i^2 + 1, 1 - \frac{1}{i})$.

[ ] $(-1, 1) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (-i, 1 + \frac{1}{i})$.

Zadanie 15. Oceń, czy dla każdych liczb rzeczywistych $a < b < c$ i dla każdej funkcji różniczkowalnej $f\colon (a,b) \cup (b,c) \to \mathbb{R}$ prawdziwe są zdania.

[ ] Jeśli f ma dokładnie jedno minimum lokalne m i dokładnie jedno maksimum lokalne M, to $m < M$.

[ ] Jeśli $\lim_{x\to a^+} f(x) = -1$ i $\lim_{x\to c^-} f(x) = 1$, to f ma przynajmniej jedno miejsce zerowe.

[ ] Jeśli $\lim_{x\to a^+} f(x) = -2$ i $\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$ oraz $f(x_0) = 2$ dla pewnego $x_0 \in (a,b)$, to f ma przynajmniej dwa miejsca zerowe.

[ ] Funkcja f osiąga wartość największą lub najmniejszą.

Zadanie 16. Oceń prawdziwość zdań.

[ ] Dla dowolnych funkcji $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jeśli złożenie $f \circ g$ jest funkcją różnowartościową, to f jest funkcją różnowartościową.

[ ] Dla dowolnych funkcji $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jeśli złożenie $f \circ g$ jest funkcją różnowartościową, to g jest funkcją różnowartościową.

[ ] Dla dowolnych bijekcji $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, złożenie $f \circ g$ jest bijekcją.

[ ] Dla dowolnych funkcji różnowartościowych $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, złożenie $f \circ g$ jest funkcją różnowartościową.

Zadanie 17. Niech X będzie niepustym zbiorem. Powiemy że funkcja $d\colon X \times X \to [0, +\infty)$ jest **metryką w** X, jeśli spełnione są warunki:

(1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$ dla wszystkich $x, y \in X$;

(2) $d(x,y) = d(y,x)$ dla wszystkich $x, y \in X$;

(3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ dla wszystkich $x, y, z \in X$.

Oceń prawdziwość zdań.

[ ] Funkcja $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ dana wzorem $d(x,y) = |x - 3y|$ jest metryką w $\mathbb{R}$.

[ ] Funkcja $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ dana wzorem $d(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ jest metryką w $\mathbb{R}$.

[ ] Funkcja $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty)$ dana wzorem

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

jest metryką w $\mathbb{R}^2$.

[ ] Funkcja $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ dana wzorem

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = y, \\ 1 & \text{dla } x \neq y \end{cases}$$

jest metryką w $\mathbb{R}$.

Zadanie 18. Niech X będzie niepustym zbiorem. Dowolny podzbiór $\sim \subset X \times X$ nazywamy **relacją na** X. Dla prostoty przyjmujemy, że napis "$x \sim y$" oznacza dokładnie tyle, co "$(x, y) \in \sim$". Powiemy, że relacja $\sim \subset X \times X$ jest **relacją równoważności na** X, jeśli dla wszystkich $x, y, z \in X$ spełnione są warunki:

- $x \sim x$ (zwrotność);
- jeśli $x \sim y$, to $y \sim x$ (symetria);
- jeśli $x \sim y$ i $y \sim z$, to $x \sim z$ (przechodniość).

Określmy na $\mathbb{Z}$ relację $\sim$ następująco: $z \sim k$ wtedy i tylko wtedy gdy $z - k$ jest podzielna przez 2. Oceń prawdziwość poniższych zdań:

[ ] $\sim$ jest relacją równoważności.

[ ] Zbiory $\{z : z \sim 1\}, \{z : z \sim 2\}$ posiadają wspólny element.

[ ] $\{z : z \sim k\} \cup \{z : z \sim k+1\} = \mathbb{Z}$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}$.

[ ] $\{z : z \sim 4\} \neq \{z : z \sim 8\}$.

Zadanie 19. Niech X będzie niepustym zbiorem i niech $\star\colon X \times X \to X$ będzie działaniem. Powiemy, że para $(X, \star)$ jest **grupą**, jeśli spełnione są warunki:

(a) dla wszystkich $x, y, z \in X$ zachodzi równość $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$;

(b) istnieje taki element $e \in X$, że dla każdego $x \in X$ zachodzą równości $e \star x = x \star e = x$;

(c) dla każdego $x \in X$ istnieje taki $y \in X$, że zachodzą równości $x \star y = y \star x = e$, gdzie e jest elementem spełniającym warunek z punktu (b).

Oceń, czy podane pary są grupami.

[ ] $(\mathbb{N}, +)$, gdzie $+$ jest (zwykłym) dodawaniem liczb;

[ ] $(\mathbb{Q}, \cdot)$, gdzie $\cdot$ jest (zwykłym) mnożeniem liczb;

[ ] $(X, \circ)$, gdzie X oznacza zbiór bijekcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a $\circ$ jest składaniem funkcji;

[ ] $(X, \circ)$, gdzie X oznacza zbiór surjekcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a $\circ$ jest składaniem funkcji.

Zadanie 20. Dla $n \geq 2$ niech $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, ..., n-1\}$ i niech $a \pmod{n}$ oznacza resztę z dzielenia liczby $a \in \mathbb{Z}$ przez n. Określmy działania $+_n, \cdot_n : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ wzorami $a +_n b := (a+b) \pmod{n}$, $a \cdot_n b := (ab) \pmod{n}$. Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe dla dowolnego $n \geq 2$ oraz $a, b, c \in \mathbb{Z}_n$:

[ ] $(a +_n b) +_n c = a +_n (b +_n c)$;

[ ] $(a +_n b) \cdot_n c = (a \cdot_n c) +_n (b \cdot_n c)$;

[ ] $(a \cdot_n b) \cdot_n c = a \cdot_n (b \cdot_n c)$;

[ ] istnieje takie $d \in \mathbb{Z}_n$, że $a \cdot_n d = 1$.

KARTA ODPOWIEDZI

XIV Wojewódzki Konkurs Matematyczny "W Świecie Matematyki"
im. Prof. Włodzimierza Krysickiego
Etap pierwszy - 10 marca 2023 r.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20