Trzeci Wojewódzki Konkurs Matematyczny "W świecie matematyki"
im. Prof. Włodzimierza Krysickiego
Etap drugi
16 lutego 2012 r.

Maksymalna do zdobycia ilość punktów: 80

1. Drugi etap Konkursu składa się z 4 zadań z treścią oraz 3 zadań z matematyki wyższej (do zadań tych dołączone są definicje, twierdzenia i przykłady pomocne w ich rozwiązywaniu).
2. Maksymalna liczba punktów do zdobycia za każde z zadań podana jest przy numerze zadania.
3. Zabrania się korzystania z korektora.
4. Podczas tego etapu Konkursu dozwolone jest korzystanie z "Zestawu wybranych wzorów matematycznych" wydawanych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną.
5. Zabrania się korzystania z kalkulatora.
6. W przypadku stwierdzenia niesamodzielnej pracy uczestnika Konkursu (poza korzystaniem z tablic matematycznych wymienionych w punkcie 4) zostaje on wykluczony z Konkursu.

Zadanie 1 (10 punktów)
W pewnej amerykańskiej agencji rządowej pracuje 30 osób: 15 mężczyzn i 15 kobiet. Kontrwywiad ustalił, że wsród nich jest troje szpiegów: dwóch mężczyzn i jedna kobieta. Nie wiadomo jednak, którzy pracownicy agencji są szpiegami. Agencja dostała do zrealizowania pewną tajną misję, do przeprowadzenia której potrzebny jest pięcioosobowy zespół. Ilu mężczyzn i ile kobiet należy powołać w skład zespołu, aby zmaksymalizować prawdopodobieństwo, że w zespole nie znajdzie się żaden szpieg ?
Zadanie 2 (10 punktów)
Wykazać, że dla dowolnych ustalonych liczb rzeczywistych $p, q \in \mathbb{R}$ równanie $\frac{1}{x-p} + \frac{1}{x-q} = 1$ zmiennej x ma pierwiastki rzeczywiste.
Zadanie 3 (10 punktów)
W kulę o promieniu R wpisano dwa stożki kołowe proste o wspólnej podstawie, z których jeden ma pole powierzchni bocznej 3 razy większe niż drugi. Wyznaczyć stosunek wysokości tych stożków.
Zadanie 4 (10 punktów)
Wariancja 25 danych liczbowych wynosi 400. Dane te powiększamy o k takich samych liczb, z których każda jest większa o 2 od wartości średniej (średniej arytmetycznej) wyjściowego zbioru złożonego z 20 liczb. Jaka jest najmniejsza wartość k, dla której odchylenie standardowe $25 + k$ danych liczbowych nie przekracza 10?

Zadanie 5 (13 punktów)

Niech X będzie zbiorem niepustym, który będziemy nazywać uniwersum.

Definicja 1

Zbiorem rozmytym na uniwersum X nazywamy następujący zbiór par uporządkowanych: $A = \{(x, f(x)) : x \in X\}$, gdzie $f_A : X \to [0,1]$ jest tzw. funkcją przynależności, definiującą stopień w jakim element $x \in X$ należy do zbioru rozmytego A. Zbiór wszystkich zbiorów rozmytych na uniwersum X oznaczamy symbolicznie $F(X)$.

Przykład 2

Jeśli $X = [0,1]$, to funkcja $f_A(x) = 1 - x$ określa zbiór A na uniwersum X. W szczególności element "zero" należy do niego w pełni, a element "jeden" w ogóle, z uwagi na odpowiedni stopień przynależności.

Definicja 3

Niech $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $A, B \in F(X)$. Wówczas α-cięciem zbioru rozmytego A nazywamy zbiór $A_\alpha = \{x \in X : f_A(x) \geq \alpha\}$.

Definicja 4

Sumą mnogościową zbiorów rozmytych A i B nazywamy zbiór $A \cup B$ określony przez funkcję przynależności $f_{A\cup B}(x) = \max\{f_A(x), f_B(x)\}$ dla $x \in X$, gdzie max oznacza większą z liczb oraz $\max\{a, a\} = a$.

Definicja 5

Iloczynem mnogościową zbiorów rozmytych A i B nazywamy zbiór $A \cap B$ określony przez funkcję przynależności $f_{A\cap B}(x) = \min\{f_A(x), f_B(x)\}$ dla $x \in X$, gdzie min oznacza mniejszą z liczb oraz $\min\{a, a\} = a$.

Zadania do rozwiązania

a. Pokazać, że jeśli A i B są dwoma zbiorami rozmytymi na uniwersum X, to zachodzi równoważność $A = B \iff \forall_{\alpha\in[0,1]} (A_\alpha = B_\alpha)$. (5 punktów)

b. Niech A, B, C będą zbiorami rozmytymi na uniwersum $[0,1]$ o następujących funkcjach przynależności: $f_A(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$, $f_B(x) = 1 - x^2$, $f_C(x) = \frac{1}{2}$ dla $x \in [0,1]$. Wyznaczyć element $x \in [0,1]$, który w największym stopniu przynależy do zbioru rozmytego $A \cap B \cap C$. (4 punkty)

c. Dla funkcji przynależności z podpunktu b. wyznaczyć zbiór $(A \cup B) \cap C$. (4 punkty)

Zadanie 6 (13 punktów)

Definicja 6

Niech $p \in \mathbb{N}$ oraz $Z_p = \{0, 1, 2, ..., p-1\}$. Dla dowolnych $x, y \in Z_p$ definiujemy w zbiorze Z_p:
* dodawanie modulo p: $x +_p y = m$, gdzie m jest resztą z dzielenia $x + y$ przez p;
* mnożenie modulo p: $x \cdot_p y = m$, gdzie m jest resztą z dzielenia $x \cdot y$ przez p;

Definicja 7

Jeżeli $p \in \mathbb{N}$ jest liczbą pierwszą, to uporządkowaną trójkę $(Z_p, +_p, \cdot_p)$ nazywamy ciałem Z_p. Ciało Z_p spełnia m.in. następujące warunki:

a. $\forall_{a,b,c \in Z_p}\ a +_p (b +_p c) = (a +_p b) +_p c$;
b. $\forall_{a \in Z_p}\ \exists_{b \in Z_p}\ a +_p b = 0$;
c. $\forall_{a,b,c \in Z_p}\ (a \cdot_p b) \cdot_p c = a \cdot_p (b \cdot_p c)$;
d. $\forall_{a,b,c \in Z_p}\ (a +_p b) \cdot_p c = a \cdot_p c +_p b \cdot_p c$;
e. $\forall_{a \in Z_p \setminus \{0\}}\ \exists_{b \in Z_p}\ a \cdot_p b = 1$;
f. $\forall_{a,b \in Z_p}\ a \cdot_p b = b \cdot_p a$;
g. $\forall_{a,b \in Z_p}\ a +_p b = b +_p a$.

Przykład 8

Rozważmy ciało Z_7. Wówczas:

a. $5 +_7 4 = 2$, bo $5 + 4 = 9$ i reszta z dzielenia 9 przez 7 jest równa 2;
b. $5 \cdot_7 4 = 6$, bo $5 \cdot 4 = 20$ i reszta z dzielenia 20 przez 7 jest równa 6;
c. należy pamiętać, że w ciele Z_7 nie występują liczby większe bądź równe 7. Liczby takie mają jednak swoją interpretację, np. liczba 10 może być interpretowana jako liczba 3 (bo $10 = 7 + 3$), liczba 100 jako liczba 2 (bo $100 = 14 \cdot 7 + 2$).

Uwaga 9

W ciele Z_p nie występują działania odejmowania i dzielenia. Punkty b. i e. Definicji 7 określają odpowiedniki tych dwóch działań. Należy pamiętać, że w dalszej części trójka Z_p ma sens tylko wtedy, gdy p jest liczbą pierwszą.

Przykład 10

W ciele Z_7 rozważmy równanie zmiennej x postaci $3 \cdot_7 x +_7 1 = 2 \cdot_7 x +_7 4$ (kolejność wykonywania działań w ciele Z_p jest taka sama jak w zbiorze liczb rzeczywistych). Jeżeli równanie to ma rozwiązanie, to jest nim pewna liczba $x \in Z_7$. Aby rozwiązać to równanie, dodajmy (modulo 7) do obu jego stron $5 \cdot_7 x$. Wówczas otrzymamy równanie postaci $x +_7 1 = 4$. Aby wyeliminować 1 znajdującą się po lewej stronie równania, należy do obu jego stron dodać 6. Wówczas mamy, że $x = 4 +_7 6 = 3$. Zatem jedynym rozwiązaniem równania jest $x = 3$. Podstawiając $x = 3$ do początkowego równania możemy sprawdzić, że jest ono rzeczywiście jego rozwiązaniem. Istotnie, $3 \cdot_7 3 +_7 1 = 2 +_7 1 = 3$ oraz $2 \cdot_7 3 +_7 4 = 6 +_7 4 = 3$.

Zadania do rozwiązania

W dalszym ciągu nie będziemy już pisali indeksów dolnych przy symbolach dodawania i mnożenia przyjmując domyślnie, że oznaczają one działania modulo p (gdzie p jest odpowiednią liczbą oznaczającą ilość elementów ciała). Indeksów tych nie trzeba pisać w rozwiązaniach zadań. W podanych podpunktach a.-c. należy rozwiązać równanie zmiennej x w podanym ciele.

a. $11 \cdot x + 3 \cdot (5 \cdot x + 14) = 7 \cdot (8 \cdot x + 1) + 20$ w ciele Z_{23}. (3 punkty)
b. $7 \cdot r \cdot x + 8 \cdot (4 \cdot x + 7) = 3 \cdot (4 \cdot r \cdot x + r + 2 \cdot x) + r \cdot r + 10$ w ciele Z_{11r}. (4 punkty)
c. $x \cdot (4 + r) + r = 2 \cdot (r + 2 \cdot x)$ w ciele Z_{3r+1}. (6 punktów)

Zadanie 7 (14 punktów)

Definicja 11

Liczbą zespoloną nazywamy dowolną liczbę postaci $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, zaś liczba i, nazywana jednostką urojoną, ma tę własność, że $i^2 = -1$. W podanym zapisie liczby z, liczba a nazywana jest częścią rzeczywistą liczby zespolonej z, zaś b - częścią urojoną liczby zespolonej z.

Uwaga 12

a. Każda liczba rzeczywista jest liczbą zespoloną (część urojona takiej liczby jest równa 0);

b. W zbiorze liczb zespolonych zachowują się podstawowe działania matematyczne, przy czym należy pamiętać o warunku, że $i^2 = -1$.

Przykład 13

Niech dane będą dwie liczby zespolone $w = 3 - 4i$, $z = -2 + 5i$. Wówczas:

a. $w + z = 3 - 4i + (-2 + 5i) = 3 - 2 - 4i + 5i = 1 + i$;

b. $w - z = 3 - 4i - (-2 + 5i) = 3 + 2 - 4i - 5i = 5 - 9i$;

c. $w \cdot z = (3 - 4i)(-2 + 5i) = -6 + 15i + 8i - 20i^2 = -6 + 23i + 20 = 14 + 23i$;

d. $\frac{w}{z} = \frac{3-4i}{-2+5i} = \frac{(3-4i)(2+5i)}{(-2+5i)(2+5i)} = \frac{6+15i-8i-20i^2}{(5i)^2-4} = \frac{6+7i+20}{-25-4} = \frac{26+7i}{-29} = -\frac{26}{29} - \frac{7}{29}i$.

Definicja 14

Pierwiastkiem k-tego stopnia z liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną w taką, że $w^k = z$.

Twierdzenie 15

Każda liczba zespolona z różna od 0 ma dokładnie k różnych pierwiastków k-tego stopnia.

Przykład 16

a. Pierwiastkami kwadratowymi liczby 1 w zbiorze liczb zespolonych są liczby 1 i -1.

b. Pierwiastkami kwadratowymi liczby $\sqrt{-4}$ są liczby $2i$ i $-2i$.

c. Pierwiastkami kwadratowymi liczby $\sqrt{(1 + 2i)^2}$ są liczby $1 + 2i$ oraz $-1 - 2i$.

Uwaga 17

a. W zbiorze liczb zespolonych każdy wielomian stopnia n zmiennej zespolonej z ma dokładnie n pierwiastków zespolonych. Na przykład, wielomian $W(z) = z^2 + 1$ zmiennej zespolonej z ma dwa pierwiastki zespolone, które są równe i oraz $-i$ (analogiczny wielomian $W(x) = x^2 + 1$ zmiennej rzeczywistej x nie ma pierwiastków rzeczywistych).

b. Aby rozwiązać równanie kwadratowe zmiennej zespolonej z, można wykorzystać wzory używane przy rozwiązywaniu równań kwadratowych zmiennej rzeczywistej. Rozważmy równanie zmiennej zespolonej $2iz^2 + (3 + 4i)z + (3 - 2i) = 0$. Wówczas wyróżnik trójmianu kwadratowego jest równy $\Delta = (3 + 4i)^2 - 8i(3 - 2i) = -23$. Zauważmy, że $\sqrt{-23}$ jest równe $\sqrt{23}i$ oraz $-\sqrt{23}i$ (do wyznaczenia rozwiązań równania kwadratowego należy wziąć dowolny z otrzymanych dwóch pierwiastków). Rozwiązaniami równania kwadratowego są zatem liczby $z_1 = \frac{-3-4i-\sqrt{23}i}{4i}$ oraz $z_2 = \frac{-3-4i+\sqrt{23}i}{4i}$.

Zadania do rozwiązania

Rozwiązać podane równania zmiennej zespolonej z. Rozwiązania zapisać w postaci $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

a. $4iz^2 + 5z + i = 0$. (3 punkty)

b. $z^3 = -27$. (4 punkty)

c. $(3i + 1)z^2 - (3 - 4i)z + (5 + 2i) = 0$. (7 punktów)