Ideały niezmiennicze na przesunięcia i ich zastosowania w teorii optymalizacji

Piotr Szuca
Politechnika Łódzka
pszuca@mat.ug.edu.pl

W modelach makroekonomicznych własność magistrali mówi że — niezależnie od warunków początkowych — wszystkie optymalne trajektorie przebiegają przez większość czasu w małym otoczeniu pewnego punktu optymalnego.

Załóżmy, że $\mathcal{I}$ jest ideałem podzbiorów $\mathbb{N}$, $f\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^m$ jest ciągła, $U \subset \mathbb{R}^r$ jest zbiorem zwartym, $\phi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ jest ciągłą funkcją, i dla dowolnego ciągu liczb rzeczywistych $y = (y_n)$

$$\mathcal{I}-\liminf y = \sup \{y_0 \in \mathbb{R}\colon \ \{n \in \mathbb{N}\colon y_n < y_0\} \in \mathcal{I}\}.$$

Rozpatrzmy dyskretny problem optymalizacyjny

$$x_{n+1} = f(x_n, u_n), x_1 = \zeta^0, u_n \in U, \tag{$*$}$$

$$J_{\mathcal{I}}(x) = \mathcal{I}-\liminf \phi(x_n) \to \max, \tag{$\mathcal{I}/**$}$$

gdzie ζ^0 jest ustalonym punktem początkowym,

Parę $\langle u, x\rangle$ nazywamy *p*rocesem jeżeli ciągi $x = (x_n)$ (tzw. trajektoria) i $u = (u_n)$ spełniają warunek $(*)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Przyjmijmy, że $\langle u^{\mathrm{opt}}, x^{\mathrm{opt}}\rangle$ jest procesem optymalnym dla problemu opisanego warunkami $(*)$, $(\mathcal{I}/**)$. Będziemy rozpatrywać warunki wystarczające do tego, żeby ciąg x^{opt} był zbieżny ($\mathcal{I}$-zbieżny). Rozważymy również pytanie czy optymalne rozwiązanie problemu $(*)$, $(\mathcal{I}/**)$ zależy od ideału $\mathcal{I}$.