Jednostajna otwartość funkcjonałów wieloliniowych

Filip Strobin
(wspólnie z M. Balcerzakiem i E. Behrendsem)
Politechnika Łódzka
filip.strobin@p.lodz.pl

Niech X będzie przestrzenią unormowaną i $T : X \to \mathbb{K}$ niech będzie niezerowym funkcjonałem liniowym (gdzie $\mathbb{K}$ to ciało liczb rzeczywistych lub zespolonych).
Wiadomo, że T jest wówczas odwzorowaniem otwartym, tj. $T(U)$ jest zbiorem otwartym dla każdego otwartego $U \subset X$. Równoważnie

$$\forall_{x\in X}\ \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ B(T(x),\delta) \subset T[B(x,\varepsilon)]$$

gdzie $B(y,r)$ oznacza kulę otwartą o środku w y i promieniu r.
Korzystając z liniowości T można łatwo pokazać, że zachodzi nawet mocniejszy warunek:

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in X}\ B(T(x),\delta) \subset T[B(x,\varepsilon)]$$

który nazywany jest *jednostajną otwartością*.
Na referacie pokażę, że tą samą własność ma każdy *wieloliniowy*, niezerowy funkcjonał $T : X_1 \times ... \times X_n \to \mathbb{K}$, gdzie $X_1, ..., X_n$ to dowolne przestrzenie unormowane.
Wyniki ten wpisuje się w ostatnie badania (m. in. M. Balcerzaka, E. Behrendsa, A. Majchrzyckiego i A. Wachowicza) nad problemami otwartości i jednostajnej otwartości pewnych odwzorowań dwuliniowych.