Wzmocnienia nierówności trójkąta i powiązane nierówności funkcyjne

Włodzimierz Fechner

Konopnica, 14-15 maja 2016 r.

nierówności Maligrandy

Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|)$ jest dowolną przestrzenią unormowaną oraz $x, y \in X$, $x, y \neq 0$. Wówczas:

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| - \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right) \min\{\|x\|, \|y\|\}$$

$$\|x+y\| \geqslant \|x\| + \|y\| - \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right) \max\{\|x\|, \|y\|\}$$

Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|)$ jest dowolną przestrzenią unormowaną oraz $x, y \in X$, $x, y \neq 0$. Wówczas:

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| - \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right) \min\{\|x\|, \|y\|\}$$

$$\|x+y\| \geqslant \|x\| + \|y\| - \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right) \max\{\|x\|, \|y\|\}$$

odległość Clarksona

W dowolnej przestrzeni unormowanej $(X, \|\cdot\|)$, dla $x, y \in X$, $x, y \neq 0$, definiujemy:

$$d[x, y] = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|.$$

Liczbę $d[x, y]$ nazywać będziemy odległością Clarksona (ang. *Clarkson distance, norm-angular distance*).

odległość Clarksona

W dowolnej przestrzeni unormowanej $(X, \|\cdot\|)$, dla $x, y \in X$, $x, y \neq 0$, definiujemy:

$$d[x, y] = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|.$$

Liczbę $d[x, y]$ nazywać będziemy odległością Clarksona (ang. *Clarkson distance, norm-angular distance*).

odległość Clarksona

Nierówność Dunkla-Williamsa (1964r.):

$$d[x,y] \leqslant \frac{4\|x-y\|}{\|x\|+\|y\|}.$$

Nierówność Massery-Schäffera (1958r.):

$$d[x,y] \leqslant \frac{2\|x-y\|}{\max\{\|x\|,\|y\|\}}.$$

Nierówności Maligrandy (2006r.):

$$d[x,y] \leqslant \frac{\|x-y\| + \big|\,\|x\|-\|y\|\,\big|}{\max\{\|x\|,\|y\|\}}.$$

$$d[x,y] \geqslant \frac{\|x-y\| - \big|\,\|x\|-\|y\|\,\big|}{\min\{\|x\|,\|y\|\}}.$$

odległość Clarksona

Nierówność Dunkla-Williamsa (1964r.):

$$d[x,y] \leqslant \frac{4\|x-y\|}{\|x\|+\|y\|}.$$

Nierówność Massery-Schäffera (1958r.):

$$d[x,y] \leqslant \frac{2\|x-y\|}{\max\{\|x\|,\|y\|\}}.$$

Nierówności Maligrandy (2006r.):

$$d[x,y] \leqslant \frac{\|x-y\|+\big|\,\|x\|-\|y\|\,\big|}{\max\{\|x\|,\|y\|\}}.$$

$$d[x,y] \geqslant \frac{\|x-y\|-\big|\,\|x\|-\|y\|\,\big|}{\min\{\|x\|,\|y\|\}}.$$

odległość Clarksona

Nierówność Dunkla-Williamsa (1964r.):

$$d[x,y] \leqslant \frac{4\|x-y\|}{\|x\|+\|y\|}.$$

Nierówność Massery-Schäffera (1958r.):

$$d[x,y] \leqslant \frac{2\|x-y\|}{\max\{\|x\|,\|y\|\}}.$$

Nierówności Maligrandy (2006r.):

$$d[x,y] \leqslant \frac{\|x-y\| + |\,\|x\|-\|y\|\,|}{\max\{\|x\|,\|y\|\}}.$$

$$d[x,y] \geqslant \frac{\|x-y\| - |\,\|x\|-\|y\|\,|}{\min\{\|x\|,\|y\|\}}.$$

Identyczność Tarskiego

Jeśli $x, y \in \mathbb{R}$, to zachodzi tożsamość:

$$\big||x| - |y|\big| = |x + y| + |x - y| - |x| - |y|.$$

Identyczność Tarskiego nie zachodzi dla liczb zespolonych ani w wyższych wymiarach.

Identyczność Tarskiego

Jeśli $x, y \in \mathbb{R}$, to zachodzi tożsamość:

$$\big|\,|x| - |y|\,\big| = |x+y| + |x-y| - |x| - |y|.$$

Identyczność Tarskiego nie zachodzi dla liczb zespolonych ani w wyższych wymiarach.

Identyczność Tarskiego

Jeśli $x, y \in \mathbb{R}$, to zachodzi tożsamość:

$$\big|\,|x| - |y|\,\big| = |x + y| + |x - y| - |x| - |y|.$$

Identyczność Tarskiego nie zachodzi dla liczb zespolonych ani w wyższych wymiarach.

Identyczność Tarskiego

Jeśli $x, y \in \mathbb{R}$, to zachodzi tożsamość:

$$\big|\,|x| - |y|\,\big| = |x+y| + |x-y| - |x| - |y|.$$

Identyczność Tarskiego nie zachodzi dla liczb zespolonych ani w wyższych wymiarach.

Analogon w przestrzeniach unormowanych (Maligranda, 2008r.)

W dowolnej przestrzeni unormowanej $(X, \|\cdot\|)$, dla $x, y \in X$ zachodzi:

$$\big|\,\|x\|-\|y\|\,\big| \leqslant \|x+y\|+\|x-y\|-\|x\|-\|y\| \leqslant \min\{\|x+y\|, \|x-y\|\}.$$

$$\big|\,\|x\|-\|y\|\,\big| \leqslant \|x\|+\|y\|-\big|\,\|x+y\|-\|x-y\|\,\big|.$$

Analogon w przestrzeniach unormowanych (Maligranda, 2008r.)

W dowolnej przestrzeni unormowanej $(X, \|\cdot\|)$, dla $x, y \in X$ zachodzi:

$$\big|\,\|x\|-\|y\|\,\big| \leqslant \|x+y\|+\|x-y\|-\|x\|-\|y\| \leqslant \min\{\|x+y\|, \|x-y\|\}.$$

$$\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \leqslant \|x\| + \|y\| - \big|\|x+y\| - \|x-y\|\big|.$$

Nierówności funkcyjne - wprowadzenie

Dla warunku trójkąta:

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

odpowiadająca mu nierówność funkcyjna to

$$f(x + y) \leqslant f(x) + f(y),$$

tzn. nierówność podaddytywności. Ma ona sens dla funkcji (niewiadomych) $f\colon S \to \mathbb{R}$ działających na dowolnej półgrupie $(S, +)$.

Nierówności funkcyjne

Nierówność funkcyjna odpowiadająca nierówności związanej z identycznością Tarskiego:

$$|f(x)-f(y)| \leqslant f(x+y)+f(x-y)-f(x)-f(y) \leqslant \min\{f(x+y), f(x-y)\}; \tag{1}$$

Twierdzenie

Załóżmy, że $(G, +)$ jest grupą abelową i $f\colon G \to \mathbb{R}$ dowolnym odwzorowaniem spełniającym $f(0) = 0$. Wówczas f spełnia (1) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją: taka przestrzeń unormowana $(X, \|\cdot\|)$ i operator addytywny $A\colon G \to X$, że

$$f(x) = \|A(x)\|, \quad x \in G.$$

Nierówność funkcyjna odpowiadająca nierówności związanej z identycznością Tarskiego:

$$|f(x)-f(y)| \leqslant f(x+y)+f(x-y)-f(x)-f(y) \leqslant \min\{f(x+y), f(x-y)\}; \tag{1}$$

Twierdzenie

Załóżmy, że $(G,+)$ jest grupą abelową i $f\colon G \to \mathbb{R}$ dowolnym odwzorowaniem spełniającym $f(0)=0$. Wówczas f spełnia (1) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją: taka przestrzeń unormowana $(X, \|\cdot\|)$ i operator addytywny $A\colon G \to X$, że

$$f(x) = \|A(x)\|, \quad x \in G.$$

Charakteryzacja funkcyjna identyczności Tarskiego

Następujące równanie funkcyjne:

$$f(f(x) - f(y)) = f(x + y) + f(x - y) - f(x) - f(y). \qquad (2)$$

ma sens dla odwzorowań $f\colon G \to G$ określonych na dowolnej grupie $(G, +)$. Szczególne rozwiązania to $f = |\cdot|$ na prostej, a także idempotentne endomorfizmy dowolnej grupy abelowej.

Charakteryzacja funkcyjna identyczności Tarskiego

Następujące równanie funkcyjne:

$$f(f(x) - f(y)) = f(x + y) + f(x - y) - f(x) - f(y). \qquad (2)$$

ma sens dla odwzorowań $f\colon G \to G$ określonych na dowolnej grupie $(G, +)$. Szczególne rozwiązania to $f = |\cdot|$ na prostej, a także idempotentne endomorfizmy dowolnej grupy abelowej.

Równanie funkcyjne (2)

Twierdzenie

Załóżmy, że $(G, +)$ *jest grupą abelową z jednoznacznym dzieleniem przez* 2*. Funkcja* $f\colon G \to G$ *spełnia* (2) *oraz*

$$f(G) \subset -f(G)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy f *jest addytywna oraz* $f \circ f = f$*.*

Równanie funkcyjne (2)

Twierdzenie

Załóżmy, że $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest funkcją ciągłą w pewnym punkcie. Wówczas* f *spełnia* (2) *wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jedna z możliwości:*

(a) $f(x) = 0$ *dla każdego* $x \in \mathbb{R}$;
(b) $f(x) = x$ *dla każdego* $x \in \mathbb{R}$;
(c) $f(x) = |x|$ *dla każdego* $x \in \mathbb{R}$;
(d) $f(x) = -|x|$ *dla każdego* $x \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie

Załóżmy, że $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest funkcją monotoniczną. Wówczas* f *spełnia* (2) *wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jedna z możliwości:*

(a) $f(x) = 0$ *dla każdego* $x \in \mathbb{R}$;
(b) $f(x) = x$ *dla każdego* $x \in \mathbb{R}$.

Równanie funkcyjne (2)

Twierdzenie

Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest funkcją ciągłą w pewnym punkcie. Wówczas* f *spełnia* (2) *wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jedna z możliwości:*
(a) $f(x) = 0$ *dla każdego* $x \in \mathbb{R}$*;*
(b) $f(x) = x$ *dla każdego* $x \in \mathbb{R}$*;*
(c) $f(x) = |x|$ *dla każdego* $x \in \mathbb{R}$*;*
(d) $f(x) = -|x|$ *dla każdego* $x \in \mathbb{R}$*.*

Twierdzenie

Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest funkcją monotoniczną. Wówczas* f *spełnia* (2) *wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jedna z możliwości:*
(a) $f(x) = 0$ *dla każdego* $x \in \mathbb{R}$*;*
(b) $f(x) = x$ *dla każdego* $x \in \mathbb{R}$*.*

Równanie funkcyjne (2)

Część powyższych wyników uogólnił Tomasz Kochanek (IM PAN, wcześniej UŚ). Załóżmy, że $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i oznaczmy:

$$S = f(\mathbb{R}), \quad Z = S \cap (-S), \quad P = S \setminus Z.$$

Załóżmy, że:

$$S - S = S \cup (-S),$$

istnieje takie $\xi \in P$, że

$$P \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n}\xi + P \right)$$

oraz

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (n\xi + P) = \varnothing$$

Równanie funkcyjne (2)

Część powyższych wyników uogólnił Tomasz Kochanek (IM PAN, wcześniej UŚ). Załóżmy, że $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i oznaczmy:

$$S = f(\mathbb{R}), \quad Z = S \cap (-S), \quad P = S \setminus Z.$$

Załóżmy, że:

$$S - S = S \cup (-S),$$

istnieje takie $\xi \in P$, że

$$P \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n}\xi + P \right)$$

oraz

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (n\xi + P) = \varnothing$$

Równanie funkcyjne (2)

Część powyższych wyników uogólnił Tomasz Kochanek (IM PAN, wcześniej UŚ). Załóżmy, że $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i oznaczmy:

$$S = f(\mathbb{R}), \quad Z = S \cap (-S), \quad P = S \setminus Z.$$

Załóżmy, że:

$$S - S = S \cup (-S),$$

istnieje takie $\xi \in P$, że

$$P \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n}\xi + P \right)$$

oraz

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (n\xi + P) = \varnothing$$

Równanie funkcyjne (2)

Część powyższych wyników uogólnił Tomasz Kochanek (IM PAN, wcześniej UŚ). Załóżmy, że $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i oznaczmy:

$$S = f(\mathbb{R}), \quad Z = S \cap (-S), \quad P = S \setminus Z.$$

Załóżmy, że:

$$S - S = S \cup (-S),$$

istnieje takie $\xi \in P$, że

$$P \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n}\xi + P\right)$$

oraz

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (n\xi + P) = \varnothing$$

Równanie funkcyjne (2)

Część powyższych wyników uogólnił Tomasz Kochanek (IM PAN, wcześniej UŚ). Załóżmy, że $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i oznaczmy:

$$S = f(\mathbb{R}), \quad Z = S \cap (-S), \quad P = S \setminus Z.$$

Załóżmy, że:

$$S - S = S \cup (-S),$$

istnieje takie $\xi \in P$, że

$$P \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n}\xi + P \right)$$

oraz

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (n\xi + P) = \varnothing$$

Równanie funkcyjne (2)

Twierdzenie

Pod powyższymi założeniami f spełnia (2) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja addytywna $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, podgrupa addytywna R zbioru liczb rzeczywistych, na której odwzorowanie A jest izomorfizmem, podgrupa $Z \subset \ker A$ i funkcja $z\colon \mathbb{R} \to Z$ spełniające:

- *funkcja z jest addytywna na zbiorze $-A^{-1}([0,+\infty))$;*
- *$z(x) = -z(-x) + z(-A|_R^{-1}(|A(x)|))$ dla $x \in A^{-1}([0,+\infty))$;*
- *$z(x) = x$ dla $x \in Z$;*

i zachodzi wzór:

$$f(x) = A|_R^{-1}(|A(x)|) + z(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Równanie funkcyjne (2)

Twierdzenie

Pod powyższymi założeniami f spełnia (2) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja addytywna $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, podgrupa addytywna R zbioru liczb rzeczywistych, na której odwzorowanie A jest izomorfizmem, podgrupa $Z \subset \ker A$ i funkcja $z\colon \mathbb{R} \to Z$ spełniające:

- *funkcja z jest addytywna na zbiorze $-A^{-1}([0,+\infty))$;*
- $z(x) = -z(-x) + z(-A|_R^{-1}(|A(x)|))$ *dla* $x \in A^{-1}([0,+\infty))$;
- $z(x) = x$ *dla* $x \in Z$;

i zachodzi wzór:

$$f(x) = A|_R^{-1}(|A(x)|) + z(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Równanie funkcyjne (2)

Twierdzenie

Pod powyższymi założeniami f spełnia (2) *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja addytywna* $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, podgrupa addytywna R zbioru liczb rzeczywistych, na której odwzorowanie A jest izomorfizmem, podgrupa* $Z \subset \ker A$ *i funkcja* $z\colon \mathbb{R} \to Z$ *spełniające:*

- *funkcja z jest addytywna na zbiorze* $-A^{-1}([0,+\infty))$*;*
- $z(x) = -z(-x) + z(-A|_R^{-1}(|A(x)|))$ *dla* $x \in A^{-1}([0,+\infty))$*;*
- $z(x) = x$ *dla* $x \in Z$*;*

i zachodzi wzór:

$$f(x) = A|_R^{-1}(|A(x)|) + z(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Równanie funkcyjne (2)

Twierdzenie

Pod powyższymi założeniami f spełnia (2) *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja addytywna $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, podgrupa addytywna R zbioru liczb rzeczywistych, na której odwzorowanie A jest izomorfizmem, podgrupa $Z \subset \ker A$ i funkcja $z\colon \mathbb{R} \to Z$ spełniające:*

- *funkcja z jest addytywna na zbiorze $-A^{-1}([0, +\infty))$;*
- $z(x) = -z(-x) + z(-A|_R^{-1}(|A(x)|))$ *dla* $x \in A^{-1}([0, +\infty))$;
- $z(x) = x$ *dla* $x \in Z$;

i zachodzi wzór:

$$f(x) = A|_R^{-1}(|A(x)|) + z(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Twierdzenie

Pod powyższymi założeniami f spełnia (2) *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja addytywna* $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *podgrupa addytywna R zbioru liczb rzeczywistych, na której odwzorowanie A jest izomorfizmem, podgrupa* $Z \subset \ker A$ *i funkcja* $z\colon \mathbb{R} \to Z$ *spełniające:*

- *funkcja z jest addytywna na zbiorze* $-A^{-1}([0,+\infty))$;
- $z(x) = -z(-x) + z(-A|_R^{-1}(|A(x)|))$ *dla* $x \in A^{-1}([0,+\infty))$;
- $z(x) = x$ *dla* $x \in Z$;

i zachodzi wzór:

$$f(x) = A|_R^{-1}(|A(x)|) + z(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Równanie funkcyjne (2)

Twierdzenie

Pod powyższymi założeniami f spełnia (2) *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja addytywna $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, podgrupa addytywna R zbioru liczb rzeczywistych, na której odwzorowanie A jest izomorfizmem, podgrupa $Z \subset \ker A$ i funkcja $z\colon \mathbb{R} \to Z$ spełniające:*

- *funkcja z jest addytywna na zbiorze $-A^{-1}([0, +\infty))$;*
- $z(x) = -z(-x) + z(-A|_R^{-1}(|A(x)|))$ *dla* $x \in A^{-1}([0, +\infty))$;
- $z(x) = x$ *dla* $x \in Z$;

i zachodzi wzór:

$$f(x) = A|_R^{-1}(|A(x)|) + z(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- C.F. Dunkl, K.S. Williams, *A simple norm inequality*, Amer. Math. Monthly 71 (1964), 53-54.
- W. Fechner, *On a composite functional equation on Abelian groups*, Aequationes Math. 78/1-2 (2009), 185-193.
- W. Fechner, *Functional characterization of a sharpening of the triangle inequality*, Math. Inequal. Appl. 13/3 (2010), 571-578.
- W. Fechner, *On some composite functional inequalities*, Aequationes Math. 79/3 (2010), 307-314.
- R. Ger, *Fischer-Muszély additivity on abelian groups*, Comment. Math. Prace Mat. (2004) Tomus Specialis in honorem Juliani Musielak, 82-96.

C.F. Dunkl, K.S. Williams, *A simple norm inequality*, Amer. Math. Monthly 71 (1964), 53-54.

W. Fechner, *On a composite functional equation on Abelian groups*, Aequationes Math. 78/1-2 (2009), 185-193.

W. Fechner, *Functional characterization of a sharpening of the triangle inequality*, Math. Inequal. Appl. 13/3 (2010), 571-578.

W. Fechner, *On some composite functional inequalities*, Aequationes Math. 79/3 (2010), 307-314.

R. Ger, *Fischer-Muszély additivity on abelian groups*, Comment. Math. Prace Mat. (2004) Tomus Specialis in honorem Juliani Musielak, 82-96.

- C.F. Dunkl, K.S. Williams, *A simple norm inequality*, Amer. Math. Monthly 71 (1964), 53-54.
- W. Fechner, *On a composite functional equation on Abelian groups*, Aequationes Math. 78/1-2 (2009), 185-193.
- W. Fechner, *Functional characterization of a sharpening of the triangle inequality*, Math. Inequal. Appl. 13/3 (2010), 571-578.
- W. Fechner, *On some composite functional inequalities*, Aequationes Math. 79/3 (2010), 307-314.
- R. Ger, *Fischer-Muszély additivity on abelian groups*, Comment. Math. Prace Mat. (2004) Tomus Specialis in honorem Juliani Musielak, 82-96.

- C.F. Dunkl, K.S. Williams, *A simple norm inequality*, Amer. Math. Monthly 71 (1964), 53-54.
- W. Fechner, *On a composite functional equation on Abelian groups*, Aequationes Math. 78/1-2 (2009), 185-193.
- W. Fechner, *Functional characterization of a sharpening of the triangle inequality*, Math. Inequal. Appl. 13/3 (2010), 571-578.
- W. Fechner, *On some composite functional inequalities*, Aequationes Math. 79/3 (2010), 307-314.
- R. Ger, *Fischer-Muszély additivity on abelian groups*, Comment. Math. Prace Mat. (2004) Tomus Specialis in honorem Juliani Musielak, 82-96.

C.F. Dunkl, K.S. Williams, *A simple norm inequality*, Amer. Math. Monthly 71 (1964), 53-54.

W. Fechner, *On a composite functional equation on Abelian groups*, Aequationes Math. 78/1-2 (2009), 185-193.

W. Fechner, *Functional characterization of a sharpening of the triangle inequality*, Math. Inequal. Appl. 13/3 (2010), 571-578.

W. Fechner, *On some composite functional inequalities*, Aequationes Math. 79/3 (2010), 307-314.

R. Ger, *Fischer-Muszély additivity on abelian groups*, Comment. Math. Prace Mat. (2004) Tomus Specialis in honorem Juliani Musielak, 82-96.

- T. Kochanek, *On a composite functional equation fulfilled by modulus of an additive function*, Aequationes Math. 80 /1-2 (2010), 155-172.
- L. Maligranda, *Simple norm inequalities*, Amer. Math. Monthly 113 (2006), 256-260.
- L. Maligranda, *Some remarks of the triangle inequality for norms*, Banach J. Math. Anal. 2/2 (2008), 31-41.
- J.L. Massera, J.J. Schäffer, *Linear differential equations and functional analysis. I*, Ann. of Math. 67 (1958), 517-573.
- A. Tarski, *Problem no. 83*, Parametr 1/6 (1930), 231; Rozwiązanie: Młody Matematyk 1/1 (1931), 90.

- T. Kochanek, *On a composite functional equation fulfilled by modulus of an additive function*, Aequationes Math. 80 /1-2 (2010), 155-172.
- L. Maligranda, *Simple norm inequalities*, Amer. Math. Monthly 113 (2006), 256-260.
- L. Maligranda, *Some remarks of the triangle inequality for norms*, Banach J. Math. Anal. 2/2 (2008), 31-41.
- J.L. Massera, J.J. Schäffer, *Linear differential equations and functional analysis. I*, Ann. of Math. 67 (1958), 517-573.
- A. Tarski, *Problem no. 83*, Parametr 1/6 (1930), 231; Rozwiązanie: Młody Matematyk 1/1 (1931), 90.

T. Kochanek, *On a composite functional equation fulfilled by modulus of an additive function*, Aequationes Math. 80 /1-2 (2010), 155-172.

L. Maligranda, *Simple norm inequalities*, Amer. Math. Monthly 113 (2006), 256-260.

L. Maligranda, *Some remarks of the triangle inequality for norms*, Banach J. Math. Anal. 2/2 (2008), 31-41.

J.L. Massera, J.J. Schäffer, *Linear differential equations and functional analysis. I*, Ann. of Math. 67 (1958), 517-573.

A. Tarski, *Problem no. 83*, Parametr 1/6 (1930), 231; Rozwiązanie: Młody Matematyk 1/1 (1931), 90.

T. Kochanek, *On a composite functional equation fulfilled by modulus of an additive function*, Aequationes Math. 80 /1-2 (2010), 155-172.

L. Maligranda, *Simple norm inequalities*, Amer. Math. Monthly 113 (2006), 256-260.

L. Maligranda, *Some remarks of the triangle inequality for norms*, Banach J. Math. Anal. 2/2 (2008), 31-41.

J.L. Massera, J.J. Schäffer, *Linear differential equations and functional analysis. I*, Ann. of Math. 67 (1958), 517-573.

A. Tarski, *Problem no. 83*, Parametr 1/6 (1930), 231; Rozwiązanie: Młody Matematyk 1/1 (1931), 90.

- T. Kochanek, *On a composite functional equation fulfilled by modulus of an additive function*, Aequationes Math. 80 /1-2 (2010), 155-172.
- L. Maligranda, *Simple norm inequalities*, Amer. Math. Monthly 113 (2006), 256-260.
- L. Maligranda, *Some remarks of the triangle inequality for norms*, Banach J. Math. Anal. 2/2 (2008), 31-41.
- J.L. Massera, J.J. Schäffer, *Linear differential equations and functional analysis. I*, Ann. of Math. 67 (1958), 517-573.
- A. Tarski, *Problem no. 83*, Parametr 1/6 (1930), 231; Rozwiązanie: Młody Matematyk 1/1 (1931), 90.