Wydział Matematyki
i Informatyki
Uniwersytetu Łódzkiego

O pewnych rodzinach funkcji ciągłych

Renata Wiertelak

Konopnica, maj 2016

Definicja (H. Lebesgue)

Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ *jest* ***punktem gęstości*** *zbioru mierzalnego* A *jeżeli*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\lambda(A \cap [x_0 - h, x_0 + h])}{2h} = 1$$

Definicja (H. Lebesgue)

Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ jest ***punktem gęstości*** *zbioru mierzalnego A jeżeli*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(A \cap [x_0 - h, x_0 + h])}{2h} = 1$$

lub równoważnie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda\left((A - x_0) \cap \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]\right)}{\frac{2}{n}} = 1,$$

gdzie $A + z = \{a + z : a \in A\}$.

$\langle s \rangle = \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – rosnący ciąg liczb naturalnych rozbieżny do nieskończoności.

Definicja (M. Filipczak, J. Hejduk, 2004)

Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ *jest punktem* $\langle s \rangle$*–**gęstości** zbioru mierzalnego* A *jeżeli*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda\left((A - x_0) \cap \left[-\frac{1}{s_n}, \frac{1}{s_n}\right]\right)}{\frac{2}{s_n}} = 1.$$

Ciąg przedziałów $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **jest zbieżny do zera** jeżeli $\operatorname{diam}(J_n \cup \{0\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Definicja (J. Hejduk, R. Wiertelak, 2014)

*Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ jest punktem $\mathcal{J}$–**gęstości** zbioru mierzalnego A jeżeli*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda\left((A - x_0) \cap J_n\right)}{\lambda(J_n)} = 1.$$

Ciąg $\mathcal{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zbiorów o dodatniej mierze **jest zbieżny do zera**, jeżeli $\operatorname{diam}(S_n \cup \{0\}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ciąg $\mathcal{S} = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zbiorów o dodatniej mierze **jest zbieżny do zera**, jeżeli $\operatorname{diam}(S_n \cup \{0\}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Definicja

Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ jest ***punktem $\mathcal{S}$–gęstości*** *zbioru mierzalnego A, jeżeli*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda\left((A - x_0) \cap S_n\right)}{\lambda(S_n)} = 1.$$

A – zbiór mierzalny,

$$\Phi_{\mathcal{S}}(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ jest punktem } \mathcal{S}\text{–gęstości zbioru } A\}$$

A – zbiór mierzalny,

$$\Phi_{\mathcal{S}}(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ jest punktem } \mathcal{S}\text{–gęstości zbioru } A\}$$

Twierdzenie

Dla dowolnych zbiorów mierzalnych A, B oraz $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$, mamy:

1. $\Phi_{\mathcal{S}}(\emptyset) = \emptyset, \quad \Phi_{\mathcal{S}}(\mathbb{R}) = \mathbb{R};$
2. $\lambda(A \triangle B) = 0 \implies \Phi_{\mathcal{S}}(A) = \Phi_{\mathcal{S}}(B);$
3. $\Phi_{\mathcal{S}}(A \cap B) = \Phi_{\mathcal{S}}(A) \cap \Phi_{\mathcal{S}}(B).$

A – zbiór mierzalny,

$$\Phi_{\mathcal{S}}(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ jest punktem } \mathcal{S}\text{–gęstości zbioru } A\}$$

Twierdzenie

Dla dowolnych zbiorów mierzalnych A, B oraz $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$, mamy:

1. $\Phi_{\mathcal{S}}(\emptyset) = \emptyset, \quad \Phi_{\mathcal{S}}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$;
2. $\lambda(A \triangle B) = 0 \implies \Phi_{\mathcal{S}}(A) = \Phi_{\mathcal{S}}(B)$;
3. $\Phi_{\mathcal{S}}(A \cap B) = \Phi_{\mathcal{S}}(A) \cap \Phi_{\mathcal{S}}(B)$.

$$\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \{A \in \mathcal{L} : A \subset \Phi_{\mathcal{S}}(A)\}.$$

A – zbiór mierzalny,

$$\Phi_{\mathcal{S}}(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ jest punktem } \mathcal{S}\text{–gęstości zbioru } A\}$$

Twierdzenie

Dla dowolnych zbiorów mierzalnych A, B oraz $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$, mamy:

1. $\Phi_{\mathcal{S}}(\emptyset) = \emptyset, \quad \Phi_{\mathcal{S}}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$;
2. $\lambda(A \bigtriangleup B) = 0 \implies \Phi_{\mathcal{S}}(A) = \Phi_{\mathcal{S}}(B)$;
3. $\Phi_{\mathcal{S}}(A \cap B) = \Phi_{\mathcal{S}}(A) \cap \Phi_{\mathcal{S}}(B)$.

$$\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \{A \in \mathcal{L} : A \subset \Phi_{\mathcal{S}}(A)\}.$$

$$\mathcal{T}_{nat} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{nat,nat} =& \{f\colon (\mathbb{R},\mathcal{T}_{nat}) \to (\mathbb{R},\mathcal{T}_{nat}) \text{ oraz } f \text{ jest ciągła}\},\\
\mathcal{C}_{nat,\mathcal{S}} =& \{f\colon (\mathbb{R},\mathcal{T}_{nat}) \to (\mathbb{R},\mathcal{T}_{\mathcal{S}}) \text{ oraz } f \text{ jest ciągła}\},\\
\mathcal{C}_{\mathcal{S},nat} =& \{f\colon (\mathbb{R},\mathcal{T}_{\mathcal{S}}) \to (\mathbb{R},\mathcal{T}_{nat}) \text{ oraz } f \text{ jest ciągła}\},\\
\mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}} =& \{f\colon (\mathbb{R},\mathcal{T}_{\mathcal{S}}) \to (\mathbb{R},\mathcal{T}_{\mathcal{S}}) \text{ oraz } f \text{ jest ciągła}\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{nat,nat} &= \{f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat}) \text{ oraz } f \text{ jest ciągła}\},\\
\mathcal{C}_{nat,\mathcal{S}} &= \{f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{S}}) \text{ oraz } f \text{ jest ciągła}\},\\
\mathcal{C}_{\mathcal{S},nat} &= \{f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{S}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat}) \text{ oraz } f \text{ jest ciągła}\},\\
\mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}} &= \{f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{S}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{S}}) \text{ oraz } f \text{ jest ciągła}\}.
\end{aligned}$$

Własność

Dla $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_{\mathcal{T}}$ zachodzą następujące zawierania:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{nat,\mathcal{S}} &\subset \mathcal{C}_{nat,nat} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{S},nat}\\
\mathcal{C}_{nat,\mathcal{S}} &\subset \mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{S},nat}
\end{aligned}$$

Dla dowolnej liczby kardynalnej κ oraz podzbioru E algebry $\mathcal{A}$, powiemy, że E **jest silnie** κ**-algebraizowalny**, jeżeli $E \cup \{0\}$ zawiera κ-generowaną wolną podalgebrę (tzn. minimalny wolny system generatorów tej podalgebry ma moc κ).

Twierdzenie (M. Balcerzak, A. Bartoszewicz, M. Filipczak)

(exponential-like method) Niech $\mathcal{F}$ *będzie taką rodziną funkcji, dla której istnieje funkcja* $F \in \mathcal{F}$ *taka, że* $f \circ F \in \mathcal{F} \setminus \{0\}$ *dla każdej funkcji typu wykładniczego* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(tzn* f *jest postaci* $f(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e^{\beta_i x}$ *dla* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *oraz różnych* $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*.). Wówczas* $\mathcal{F}$ *jest silnie* $\mathfrak{c}$*-algebraizowalna. Dokładniej, jeżeli* $H \subset \mathbb{R}$ *jest zbiorem mocy* $\mathfrak{c}$*, liniowo niezależnym nad ciałem* $\mathbb{Q}$*, to* $exp \circ rF$*,* $r \in H$*, są wolnymi generatorami algebry zawartej w* $\mathcal{F} \cup \{0\}$*.*

Twierdzenie (S. Lindner, M. Terepeta)

Niech Φ_1 *oraz* Φ_2 *będą operatorami prawie dolnej gęstości generującymi topologie* $\mathcal{T}_1$ *oraz* $\mathcal{T}_2$*, które są niezmiennicze na translacje i zawierające topologię naturalną na* $\mathbb{R}$*. Jeżeli istnieją ciągi* (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) *zbieżne do zera takie, że:*

1. $0 < d_{n+1} < c_n < a_n < b_n < d_n$ *dla* $n \in \mathbb{N}$,
2. *zbiory przedziałowe* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ *i* $C = \bigcup_{n=1}^{\infty}[c_n, d_n]$ *mają własność:* $0 \in \Phi_1(A)$ *oraz* $0 \notin \Phi_2(C)$,

to rodzina $\mathcal{C}_{\Phi_1,nat} \setminus \mathcal{C}_{\Phi_2,nat}$ *jest silnie* $\mathfrak{c}$*-algebraizowalna.*

Niech $X \neq \emptyset$ będzie przestrzenią metryczną. Dla ustalonych $M \subset X$, $x \in X$, $r > 0$ definiujemy

$$\gamma(x, r, M) := \sup\{t \geq 0 : \exists_{z \in X}\ K(z, t) \subset K(x, r) \setminus M\}$$

Niech $X \neq \emptyset$ będzie przestrzenią metryczną. Dla ustalonych $M \subset X$, $x \in X$, $r > 0$ definiujemy

$$\gamma(x, r, M) := \sup\{t \geq 0 : \exists_{z \in X} \; K(z, t) \subset K(x, r) \setminus M\}$$

Powiemy, że zbiór M jest **silnie porowaty** w X jeżeli:

$$\underset{x \in M}{\forall} \; 2 \limsup_{r \to 0+} \frac{\gamma(x, r, M)}{r} = 1$$

Niech $X \neq \emptyset$ będzie przestrzenią metryczną. Dla ustalonych $M \subset X$, $x \in X$, $r > 0$ definiujemy

$$\gamma(x, r, M) := \sup\{t \geq 0 : \exists_{z \in X}\ K(z, t) \subset K(x, r) \setminus M\}$$

Powiemy, że zbiór M jest **silnie porowaty** w X jeżeli:

$$\underset{x \in M}{\forall}\ 2 \limsup_{r \to 0+} \frac{\gamma(x, r, M)}{r} = 1$$

W $\mathcal{C}_{\mathcal{S},nat}$ możemy zdefiniować

$$\varrho(f, g) := \min\{1, \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in \mathbb{R}\}\}$$

$\mathcal{C}_{nat,\mathcal{S}} \subset (\mathcal{C}_{nat,nat} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}})$

$\mathcal{C}_{nat,\mathcal{S}} \subset (\mathcal{C}_{nat,nat} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}})$

Stwierdzenie

Dla każdego ciągu $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_{\mathcal{T}}$ rodzina $\mathcal{C}_{nat,\mathcal{S}}$ równa jest rodzinie funkcji stałych.

$\mathcal{C}_{nat,\mathcal{S}} \subset (\mathcal{C}_{nat,nat} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}})$

Stwierdzenie

Dla każdego ciągu $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_{\mathcal{T}}$ rodzina $\mathcal{C}_{nat,\mathcal{S}}$ równa jest rodzinie funkcji stałych.

$$f(x) = \begin{cases} -a & \text{dla } x < -a \\ x & \text{dla } x \in [-a, a] \\ a & \text{dla } x > a. \end{cases}$$

$\mathcal{C}_{nat,\mathcal{S}} \subset (\mathcal{C}_{nat,nat} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}})$

Twierdzenie

Dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_{\mathcal{T}}$ rodzina $\mathcal{C}_{nat,nat} \setminus \mathcal{C}_{nat,\mathcal{S}}$ jest silnie $\mathfrak{c}$-algebraizowalna.

$\mathcal{C}_{nat,\mathcal{S}} \subset (\mathcal{C}_{nat,nat} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}})$

Twierdzenie

Dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_{\mathcal{T}}$ rodzina $\mathcal{C}_{nat,nat} \setminus \mathcal{C}_{nat,\mathcal{S}}$ jest silnie $\mathfrak{c}$-algebraizowalna.

Twierdzenie

Dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_{\mathcal{T}}$ zbieżnego jednostronnie rodzina $\mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}} \setminus \mathcal{C}_{nat,\mathcal{S}}$ jest silnie $\mathfrak{c}$-algebraizowalna.

$\mathcal{C}_{nat,\mathcal{S}} \subset (\mathcal{C}_{nat,nat} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}})$

Twierdzenie

Dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_{\mathcal{T}}$ rodzina $\mathcal{C}_{nat,nat} \setminus \mathcal{C}_{nat,\mathcal{S}}$ jest silnie $\mathfrak{c}$-algebraizowalna.

Twierdzenie

Dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_{\mathcal{T}}$ zbieżnego jednostronnie rodzina $\mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}} \setminus \mathcal{C}_{nat,\mathcal{S}}$ jest silnie $\mathfrak{c}$-algebraizowalna.

Twierdzenie

Dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_{\mathcal{T}}$ rodzina $\mathcal{C}_{nat,\mathcal{S}}$ jest silnie porowata w $((\mathcal{C}_{nat,nat} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}}), \varrho)$.

$\mathcal{C}_{nat,nat} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{S},nat}$

$\mathcal{C}_{nat,nat} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{S},nat}$

Twierdzenie

Dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_{\mathcal{T}}$ rodzina $\mathcal{C}_{\mathcal{S},nat} \setminus \mathcal{C}_{nat,nat}$ jest silnie $\mathfrak{c}$-algebraizowalna.

$\mathcal{C}_{nat,nat} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{S},nat}$

Twierdzenie

Dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_{\mathcal{T}}$ rodzina $\mathcal{C}_{\mathcal{S},nat} \setminus \mathcal{C}_{nat,nat}$ jest silnie $\mathfrak{c}$-algebraizowalna.

Twierdzenie

Dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_{\mathcal{T}}$ rodzina $\mathcal{C}_{nat,nat}$ jest silnie porowata w $(\mathcal{C}_{\mathcal{S},nat}, \varrho)$.

$(\mathcal{C}_{nat,nat} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}}) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}}$

$(\mathcal{C}_{nat,nat} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}}) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}}$

Twierdzenie

Dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_{\mathcal{T}}$ zbieżnego jednostronnie rodzina $\mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}} \setminus \mathcal{C}_{nat,nat}$ jest silnie $\mathfrak{c}$-algebraizowalna.

$(\mathcal{C}_{nat,nat} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}}) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}}$

Twierdzenie

Dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_{\mathcal{T}}$ zbieżnego jednostronnie rodzina $\mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}} \setminus \mathcal{C}_{nat,nat}$ jest silnie $\mathfrak{c}$-algebraizowalna.

Twierdzenie

Dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_{\mathcal{T}}$ zbieżnego jednostronnie rodzina $\mathcal{C}_{nat,nat} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}}$ jest silnie porowata w $(\mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}}, \varrho)$.

$(\mathcal{C}_{nat,nat} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}}) \subset \mathcal{C}_{nat,nat}$

$(\mathcal{C}_{nat,nat} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}}) \subset \mathcal{C}_{nat,nat}$

Twierdzenie

Dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_{\mathcal{T}}$ zbieżnego jednostronnie rodzina $\mathcal{C}_{nat,nat} \setminus \mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}}$ jest silnie $\mathfrak{c}$-algebraizowalna.

$(\mathcal{C}_{nat,nat} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}}) \subset \mathcal{C}_{nat,nat}$

Twierdzenie

Dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_{\mathcal{T}}$ zbieżnego jednostronnie rodzina $\mathcal{C}_{nat,nat} \setminus \mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}}$ jest silnie $\mathfrak{c}$-algebraizowalna.

Twierdzenie

Dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_{\mathcal{T}}$ zbieżnego jednostronnie rodzina $\mathcal{C}_{nat,nat} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}}$ jest silnie porowata w $(\mathcal{C}_{nat,nat}, \varrho)$.

$\mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{S},nat}$

$\mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{S},nat}$

Twierdzenie

Dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_{\mathcal{T}}$ zbieżnego jednostronnie rodzina $\mathcal{C}_{\mathcal{S},nat} \setminus \mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}}$ jest silnie $\mathfrak{c}$-algebraizowalna.

$\mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{S},nat}$

Twierdzenie

Dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_{\mathcal{T}}$ zbieżnego jednostronnie rodzina $\mathcal{C}_{\mathcal{S},nat} \setminus \mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}}$ jest silnie $\mathfrak{c}$-algebraizowalna.

Problem

Czy dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_{\mathcal{T}}$ rodzina $\mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{S}}$ jest silnie porowata w $(\mathcal{C}_{\mathcal{S},nat}, \varrho)$?

Dziękuję za uwagę

[1] C. Goffman, C. J. Neugebauer, T. Nishiura, *The density topology and approximate continuity*, Duke Math. J. **28** (1961), 497-505.

[2] O. Haupt, C. Pauc, *La topologie de Denjoy approximative envisagée comme vraie topologie*, C. R. Acad. Sci. Paris **234** (1952), 390-392.

[3] M. Filipczak, J. Hejduk, *On topologies associated with the Lebesgue measure*, Tatra Mt. Math. Publ. **28** (2004), 187-197.

[4] J. Hejduk, R. Wiertelak, *On the generalization of density topologies on the real line*, Math. Slovaca **64(5)** (2014), 1267-1276.

[5] J. Hejduk, R. Wiertelak, *On the abstract density topologies generated by lower and almost lower density operators*, Traditional and present-day topics in real analysis, Łodź University Press, 2013.

[6] F. D. Tall, *The density topology*, Pacific. J. Math. **62(1)** (1976), 275-284.

[7] F. Strobin, R. Wiertelak, *On a generalization of density topologies on the real line*, Topology and its Applications (2016).