Odkopane twierdzenie Łuzina

Marcin Michalski

Politechnika Wrocławska

III Warsztaty z Analizy Rzeczywistej 2017
20-21.05.2017, Konopnica

Twierdzenie (Łuzin, 1934)

Każdy podzbiór prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ można rozłożyć na 2 pełne (w sensie miary lub kategorii) podzbiory.

Luzin N. N., Sur la decomposition des ensembles, C. R. Acad. Sci. Paris 198, 1671-1674, 5 (1934).

Twierdzenie (Łuzin, 1934)

Każdy podzbiór prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ można rozłożyć na 2 pełne (w sensie miary lub kategorii) podzbiory.

Luzin N. N., Sur la decomposition des ensembles, C. R. Acad. Sci. Paris 198, 1671-1674, 5 (1934).

E. Grzegorek, I. Labuda, Partitions into thin sets or forgotten theorems of Kunugi and Lusin-Novikov (marzec 2017).

Żyjemy na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$.
λ - miara Lebesgue'a
$\mathcal{B}$ - σ-ciało zbiorów borelowskich.
$\mathcal{M}, \mathcal{N}$ to σ-ideały zbiorów zbiorów I kategorii i zbiorów miary zero.

Definicja

Mówimy, że σ-ideał $\mathcal{I}$

- *ma bazą borelowską, jeśli* $(\forall A \in \mathcal{I})(\exists B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{I})(A \subseteq B)$;
- *jest ccc, jeśli każda rodzina parami rozłącznych zbiorów borelowskich spoza ideału jest przeliczalna;*
- *ma własność otoczki, jeśli każdy A można nakryć borelowskim zbiorem B takim, że* $(\forall C \in \mathcal{B})(A \subseteq C \subseteq B \Rightarrow B \setminus C \in \mathcal{I})$. *Zbiór B nazywamy wtedy $\mathcal{I}$-minimalnym.*

$\mathcal{M}$ oraz $\mathcal{N}$ są ccc oraz są wyposażone w bazy borelowskie, zatem mają również własność otoczki.

Niech $\mathcal{I}$ będzie σ ideałem.

Definicja

Mówimy, że zbiór A

- *jest $\mathcal{I}-$mierzalny, jeśli $A \in \sigma(\mathcal{B} \cup \mathcal{I})$. W przeciwnym razie jest $\mathcal{I}-$niemierzalny;*
- *jest pełny w zbiorze B w sensie $\mathcal{I}$, jeśli $A \subseteq B$ oraz dla każdego zbioru $\mathcal{I}-$mierzalnego X mamy $X \cap A \in \mathcal{I} \Leftrightarrow X \cap B \in \mathcal{I}$. Równoważnie: $A \subseteq B$ oraz A i B mają te same otoczki.*

Niech $\mathcal{I}$ będzie σ ideałem.

Definicja

Mówimy, że zbiór A

- *jest $\mathcal{I}-$mierzalny, jeśli $A \in \sigma(\mathcal{B} \cup \mathcal{I})$. W przeciwnym razie jest $\mathcal{I}-$niemierzalny;*
- *jest pełny w zbiorze B w sensie $\mathcal{I}$, jeśli $A \subseteq B$ oraz dla każdego zbioru $\mathcal{I}-$mierzalnego X mamy $X \cap A \in \mathcal{I} \Leftrightarrow X \cap B \in \mathcal{I}$. Równoważnie: $A \subseteq B$ oraz A i B mają te same otoczki.*

Dla kategorii wystarczy testować bazowymi zbiorami otwartymi (np. odcinkami o końcach wymiernych).
Dla zbiorów o skończonej mierze zewnętrznej pełność oznacza posiadanie tej samej miary zewnętrznej.

Rozkład dla kategorii

Niech X będzie zbiorem II kategorii, $X = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$.

- B.u.o.: $X \subseteq [0,1]$ oraz $(\forall \beta < \kappa)(\{x_\alpha : \alpha < \beta\} \in \mathcal{M})$.

Rozkład dla kategorii

Niech X będzie zbiorem II kategorii, $X = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$.

- B.u.o.: $X \subseteq [0, 1]$ oraz $(\forall \beta < \kappa)(\{x_\alpha : \alpha < \beta\} \in \mathcal{M})$.
- Zdefiniujmy $T = \{(x_\alpha, x_\beta) : \beta < \alpha\} \subseteq [0, 1]^2$. Zauważmy, że cięcia pionowe T_x są I kategorii, a poziome T^y są komizerne w X dla $x, y \in X$.

Rozkład dla kategorii

Niech X będzie zbiorem II kategorii, $X = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$.

- B.u.o.: $X \subseteq [0,1]$ oraz $(\forall \beta < \kappa)(\{x_\alpha : \alpha < \beta\} \in \mathcal{M})$.
- Zdefiniujmy $T = \{(x_\alpha, x_\beta) : \beta < \alpha\} \subseteq [0,1]^2$. Zauważmy, że cięcia pionowe T_x są I kategorii, a poziome T^y są komizerne w X dla $x, y \in X$.
- Przedstawmy $T_x, x \in X$, jako sumę $\dot{\bigcup}_{n\in\omega} F_{n,x}$ parami rozłącznych zbiorów nigdziegęstych.

Rozkład dla kategorii

Niech X będzie zbiorem II kategorii, $X = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$.

- B.u.o.: $X \subseteq [0,1]$ oraz $(\forall \beta < \kappa)(\{x_\alpha : \alpha < \beta\} \in \mathcal{M})$.
- Zdefiniujmy $T = \{(x_\alpha, x_\beta) : \beta < \alpha\} \subseteq [0,1]^2$. Zauważmy, że cięcia pionowe T_x są I kategorii, a poziome T^y są komizerne w X dla $x, y \in X$.
- Przedstawmy $T_x, x \in X$, jako sumę $\dot{\bigcup}_{n\in\omega} F_{n,x}$ parami rozłącznych zbiorów nigdziegęstych.
- Wtedy

$$T = \bigcup_{x\in X} \bigcup_{n\in\omega} (\{x\} \times F_{n,x})$$

Rozkład dla kategorii

Niech X będzie zbiorem II kategorii, $X = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$.

- B.u.o.: $X \subseteq [0,1]$ oraz $(\forall \beta < \kappa)(\{x_\alpha : \alpha < \beta\} \in \mathcal{M})$.
- Zdefiniujmy $T = \{(x_\alpha, x_\beta) : \beta < \alpha\} \subseteq [0,1]^2$. Zauważmy, że cięcia pionowe T_x są I kategorii, a poziome T^y są komizerne w X dla $x, y \in X$.
- Przedstawmy $T_x, x \in X$, jako sumę $\dot{\bigcup}_{n\in\omega} F_{n,x}$ parami rozłącznych zbiorów nigdziegęstych.
- Wtedy

$$T = \bigcup_{x\in X} \bigcup_{n\in\omega} (\{x\} \times F_{n,x}) = \bigcup_{n\in\omega} \bigcup_{x\in X} (\{x\} \times F_{n,x}) = \bigcup_{n\in\omega} H_n.$$

Rozkład dla kategorii

Niech X będzie zbiorem II kategorii, $X = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$.

- B.u.o.: $X \subseteq [0,1]$ oraz $(\forall\beta < \kappa)(\{x_\alpha : \alpha < \beta\} \in \mathcal{M})$.
- Zdefiniujmy $T = \{(x_\alpha, x_\beta) : \beta < \alpha\} \subseteq [0,1]^2$. Zauważmy, że cięcia pionowe T_x są I kategorii, a poziome T^y są komizerne w X dla $x, y \in X$.
- Przedstawmy $T_x, x \in X$, jako sumę $\dot{\bigcup}_{n\in\omega} F_{n,x}$ parami rozłącznych zbiorów nigdziegęstych.
- Wtedy

$$T = \bigcup_{x\in X}\bigcup_{n\in\omega}(\{x\} \times F_{n,x}) = \bigcup_{n\in\omega}\bigcup_{x\in X}(\{x\} \times F_{n,x}) = \bigcup_{n\in\omega} H_n.$$

- $H_n = \bigcup_{x\in X}(\{x\} \times F_{n,x})$.

Rozkład dla kategorii c.d.

- $H_n = \bigcup_{x \in X}(\{x\} \times F_{n,x})$. Zauważmy, że $\bigcup_{n \in \omega} H_n^y = X \ (mod \mathcal{M})$ dla $y \in X$ i $(H_n)_x$ jest nigdziegęsty;

Rozkład dla kategorii c.d.

- $H_n = \bigcup_{x\in X}(\{x\} \times F_{n,x})$. Zauważmy, że $\bigcup_{n\in\omega} H_n^y = X \ (mod \mathcal{M})$ dla $y \in X$ i $(H_n)_x$ jest nigdziegęsty;
- Wprowadźmy numerację $\{I_n : n \in \omega\}$ tych odcinków o końcach wymiernych, że $I_n \cap X \notin \mathcal{M}$ dla $n \in \omega$.

Rozkład dla kategorii c.d.

- $H_n = \bigcup_{x \in X}(\{x\} \times F_{n,x})$. Zauważmy, że $\bigcup_{n\in\omega} H_n^y = X \ (mod \mathcal{M})$ dla $y \in X$ i $(H_n)_x$ jest nigdziegęsty;
- Wprowadźmy numerację $\{I_n : n \in \omega\}$ tych odcinków o końcach wymiernych, że $I_n \cap X \notin \mathcal{M}$ dla $n \in \omega$.
- CEL: Pokazać, że istnieje $y \in X$, że $(\forall k \in \omega)(\exists^\infty n)(H_n^y \cap I_k \notin \mathcal{M})$

Rozkład dla kategorii c.d.

- $H_n = \bigcup_{x \in X}(\{x\} \times F_{n,x})$. Zauważmy, że $\bigcup_{n \in \omega} H_n^y = X \ (mod \mathcal{M})$ dla $y \in X$ i $(H_n)_x$ jest nigdziegęsty;
- Wprowadźmy numerację $\{I_n : n \in \omega\}$ tych odcinków o końcach wymiernych, że $I_n \cap X \notin \mathcal{M}$ dla $n \in \omega$.
- CEL: Pokazać, że istnieje $y \in X$, że $(\forall k \in \omega)(\exists^\infty n)(H_n^y \cap I_k \notin \mathcal{M})$
- Niech $Y = \{y \in X : (\forall k \in \omega)(\exists^\infty n)(H_n^y \cap I_k \notin \mathcal{M})\}$. Pokażemy, że Y jest komizerny w X.

Rozkład dla kategorii c.d.

- $H_n = \bigcup_{x \in X}(\{x\} \times F_{n,x})$. Zauważmy, że $\bigcup_{n \in \omega} H_n^y = X \ (mod \mathcal{M})$ dla $y \in X$ i $(H_n)_x$ jest nigdziegęsty;
- Wprowadźmy numerację $\{I_n : n \in \omega\}$ tych odcinków o końcach wymiernych, że $I_n \cap X \notin \mathcal{M}$ dla $n \in \omega$.
- CEL: Pokazać, że istnieje $y \in X$, że $(\forall k \in \omega)(\exists^\infty n)(H_n^y \cap I_k \notin \mathcal{M})$
- Niech $Y = \{y \in X : (\forall k \in \omega)(\exists^\infty n)(H_n^y \cap I_k \notin \mathcal{M})\}$. Pokażemy, że Y jest komizerny w X.
- Przypuśćmy, że jednak nie, tzn. zbiór

$$Z = X \setminus Y = \{y \in X : (\exists k \in \omega)(\forall^\infty)(H_n^y \cap I_k \in \mathcal{M})\}$$

jest drugiej kategorii.

Rozkład dla kategorii c.d.

- $H_n = \bigcup_{x \in X}(\{x\} \times F_{n,x})$. Zauważmy, że $\bigcup_{n \in \omega} H_n^y = X \ (mod \mathcal{M})$ dla $y \in X$ i $(H_n)_x$ jest nigdziegęsty;
- Wprowadźmy numerację $\{I_n : n \in \omega\}$ tych odcinków o końcach wymiernych, że $I_n \cap X \notin \mathcal{M}$ dla $n \in \omega$.
- CEL: Pokazać, że istnieje $y \in X$, że $(\forall k \in \omega)(\exists^\infty n)(H_n^y \cap I_k \notin \mathcal{M})$
- Niech $Y = \{y \in X : (\forall k \in \omega)(\exists^\infty n)(H_n^y \cap I_k \notin \mathcal{M})\}$. Pokażemy, że Y jest komizerny w X.
- Przypuśćmy, że jednak nie, tzn. zbiór

  $$Z = X \setminus Y = \{y \in X : (\exists k \in \omega)(\forall^\infty)(H_n^y \cap I_k \in \mathcal{M})\}$$

  jest drugiej kategorii.
- Wtedy istnieją k_0, n_0, że zbiór

  $$Z_{k_0,n_0} = \{y \in X : (\forall n > n_0)(H_{n_0}^y \cap I_{k_0} \in \mathcal{M})\}$$

  jest drugiej kategorii.

Rozkład dla kategorii c.d.

Lemat

Niech $X \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem II kategorii, a zbiór $H \subseteq \mathbb{R}^2$ taki, że $(\forall x \in X)(H_x)$ jest nigdziegęsty. Wtedy zbiór

$$Z = \{y \in X : X \setminus H^y \in \mathcal{M}\}$$

jest nigdziegęsty.

Rozkład dla kategorii c.d.

Lemat

Niech $X \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem II kategorii, a zbiór $H \subseteq \mathbb{R}^2$ taki, że $(\forall x \in X)(H_x)$ jest nigdziegęsty. Wtedy zbiór

$$Z = \{y \in X : X \setminus H^y \in \mathcal{M}\}$$

jest nigdziegęsty.

Dowód

Przypuśćmy, że Z nie jest niegdziegęsty. Wtedy istnieje przeliczalny zbiór $Q \subseteq Z$ gęsty w Z, $Int(\overline{Q}) \neq \emptyset$.

Rozkład dla kategorii c.d.

Lemat

Niech $X \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem II kategorii, a zbiór $H \subseteq \mathbb{R}^2$ taki, że $(\forall x \in X)(H_x)$ jest nigdziegęsty. Wtedy zbiór

$$Z = \{y \in X : X \setminus H^y \in \mathcal{M}\}$$

jest nigdziegęsty.

Dowód

Przypuśćmy, że Z nie jest niegdziegęsty. Wtedy istnieje przeliczalny zbiór $Q \subseteq Z$ gęsty w Z, $Int(\overline{Q}) \neq \emptyset$.

- $\bigcup_{y \in Q} X \setminus H^y \in \mathcal{M}$, zatem $\bigcap_{y \in Q} H^y$ jest II kategorii i w szczególności niepusty.

Rozkład dla kategorii c.d.

Lemat

Niech $X \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem II kategorii, a zbiór $H \subseteq \mathbb{R}^2$ taki, że $(\forall x \in X)(H_x)$ jest nigdziegęsty. Wtedy zbiór

$$Z = \{y \in X : X \backslash H^y \in \mathcal{M}\}$$

jest nigdziegęsty.

Dowód

Przypuśćmy, że Z nie jest niegdziegęsty. Wtedy istnieje przeliczalny zbiór $Q \subseteq Z$ gęsty w Z, $Int(\overline{Q}) \neq \emptyset$.

- $\bigcup_{y \in Q} X \backslash H^y \in \mathcal{M}$, zatem $\bigcap_{y \in Q} H^y$ jest II kategorii i w szczególności niepusty.
- Jeśli $x \in \bigcap_{y \in Q} H^y$, to $(\forall y \in Q)(x \in H^y) \equiv (\forall y \in Q)(y \in H_x)$, czyli $Q \subseteq H_x$, wbrew nigdziegęstości H_x. $\square$

Rozkład dla kategorii c.d.

Lemat

Niech $X \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem II kategorii, a zbiór $H \subseteq \mathbb{R}^2$ taki, że $(\forall x \in X)(H_x)$ jest nigdziegęsty. Wtedy zbiór

$$Z = \{y \in X : X \setminus H^y \in \mathcal{M}\}$$

jest nigdziegęsty.

Niech $H = \bigcup_{n \leq n_0} H_n$.

Rozkład dla kategorii c.d.

Lemat

Niech $X \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem II kategorii, a zbiór $H \subseteq \mathbb{R}^2$ taki, że $(\forall x \in X)(H_x)$ jest nigdziegęsty. Wtedy zbiór

$$Z = \{y \in X : X \setminus H^y \in \mathcal{M}\}$$

jest nigdziegęsty.

Niech $H = \bigcup_{n \leq n_0} H_n$.

- $\forall x \in X \; H_x$ jest nigdziegęste oraz $(\forall y \in X)(X \setminus \bigcup_{n \in \omega} H_n^y \in \mathcal{M})$

Rozkład dla kategorii c.d.

Lemat

Niech $X \subseteq \mathbb{R}$ *będzie zbiorem II kategorii, a zbiór* $H \subseteq \mathbb{R}^2$ *taki, że* $(\forall x \in X)(H_x)$ *jest nigdziegęsty. Wtedy zbiór*

$$Z = \{y \in X : X \backslash H^y \in \mathcal{M}\}$$

jest nigdziegęsty.

Niech $H = \bigcup_{n \leq n_0} H_n$.

- $\forall x \in X \; H_x$ jest nigdziegęste oraz $(\forall y \in X)(X \backslash \bigcup_{n \in \omega} H_n^y \in \mathcal{M})$
- Ponieważ dla $y \in Z_{n_0,k_0}$ zbiór $\bigcup_{n > n_0}(H_n^y \cap I_{k_0}) \in \mathcal{M}$, H^y jest komizerny w $X \cap I_{k_0}$ dla niemizernie wielu y.

Rozkład dla kategorii c.d.

Lemat

Niech $X \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem II kategorii, a zbiór $H \subseteq \mathbb{R}^2$ taki, że $(\forall x \in X)(H_x)$ jest nigdziegęsty. Wtedy zbiór

$$Z = \{y \in X : X \setminus H^y \in \mathcal{M}\}$$

jest nigdziegęsty.

Niech $H = \bigcup_{n \leq n_0} H_n$.

- $\forall x \in X \ H_x$ jest nigdziegęste oraz $(\forall y \in X)(X \setminus \bigcup_{n \in \omega} H_n^y \in \mathcal{M})$
- Ponieważ dla $y \in Z_{n_0, k_0}$ zbiór $\bigcup_{n > n_0}(H_n^y \cap I_{k_0}) \in \mathcal{M}$, H^y jest komizerny w $X \cap I_{k_0}$ dla niemizernie wielu y.
- Z drugiej strony z Lematu $\{y : X \cap I_{k_0} \setminus H^y \in \mathcal{M}\}$ jest nigdziegęsty,

co daje pożądaną sprzeczność.

Rozkład dla kategorii c.d.

Stąd zbiór $Y = \{y \in X : (\forall k \in \omega)(\exists^\infty n)(H_n^y \cap I_k \notin \mathcal{M})\}$ jest niepusty, a to daje możliwość uruchomienia indukcji i wygryzania par rozłącznych podzbiorów II kategorii z $X \cap I_k$ dla wszystkich $k \in \omega$.

Dziękuję za uwagę!