Twierdzenie typu Cantora dla niezstępujących ciągów zbiorów i jego zastosowania

Jacek Jachymski

Instytut Matematyki
Politechnika Łódzka

Warsztaty z Analizy Rzeczywistej
Konopnica, 14 maja, 2016 r.

”The authors establish an interesting local version of the Banach Contraction Principle. The proof is rather standard, but technically quite complicated.”

(Lech Górniewicz, Mathematical Reviews, recenzja artykułu S. Reicha i A.J. Zaslavskiego pt. *Convergence of iterates for a class of mappings of contractive type, J. Fixed Point Theory Appl. 2007*)

Twierdzenie 1 (Reich–Zaslavski)**.** *Załóżmy, że K jest niepustym, domkniętym podzbiorem przestrzeni metrycznej zupełnej (X, d), $T\colon K \to X$ i $L(T) < 1$, gdzie $L(T)$ jest stałą Lipschitza T. Załóżmy, że $K_0 \subseteq K$ jest niepusty, ograniczony i taki, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $x_n \in K_0$, dla którego $T^n x_n$ jest dobrze określone. Wówczas T ma dokładnie jeden punkt stały $x_* \in K$ oraz*

$$\forall M, \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{N} \ \forall (x_i)_{i=0}^{n} \subseteq K \ [(d(x_0, x_*) \leq M \text{ i } x_i = Tx_{i-1} \text{ dla } i = 1, \ldots n) \Rightarrow d(x_i, x_*) < \varepsilon \text{ dla } i = k, \ldots, n].$$

Oznaczenia

$\mathcal{P}(X) := 2^X \setminus \{\emptyset\}$. Dla $A, B \in \mathcal{P}(X)$

$D(A,B) := \sup\{d(x,B) : x \in A\}$, $H(A,B) := \max\{D(A,B), D(B,A)\}$.

Lemat 1. *Niech $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Wówczas zachodzą nierówności:*

$$\forall a \in A, b \in B \;\; d(a,b) \le \operatorname{diam} A + d(b,A);$$

$$H(A,B) \le \operatorname{diam} A + D(B,A);$$

$$\operatorname{diam} B \le \operatorname{diam} A + 2D(B,A).$$

Lemat 2. *Niech $A \in \mathcal{P}(X)$ i $A_n \in \mathcal{P}(X)$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $H(A_n, A) \to 0$. Wówczas (A_n) ma dokładnie jedną granicę wtedy i tylko wtedy, gdy $A^d = \emptyset$.*

Twierdzenie 2 (typu Cantora)**.** *Załóżmy, że* (X, d) *jest przestrzenią metryczną zupełną,* $A_n \in \mathcal{P}(X)$ *dla* $n \in \mathbb{N}$ *i* $\operatorname{diam} A_n \to 0$. *Jeśli*

$$\sum_{n=1}^{\infty} D(A_{n+1}, A_n) < \infty$$

to ciąg (A_n) *jest zbieżny w* $(\mathcal{P}(X), H)$, *ma dokładnie jedną granicę, przy tym* $\lim A_n = \{a_*\}$ *dla pewnego* $a_* \in X$. *Ponadto*

$$H(A_n, \{a_*\}) \leq \operatorname{diam} A_n + \sum_{i=n}^{\infty} D(A_{i+1}, A_i).$$

Stąd dla dowolnego ciągu (a_n) *takiego, że* $a_n \in A_n$, $d(a_n, a_*) \to 0$ *i zbieżność ta jest jednostajna względem takich ciągów, tj.*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ k \in \mathbb{N}\ \forall (a_i) \in \Pi_{i\in\mathbb{N}} A_i\ \forall n \geq k\ d(a_n, a_*) < \varepsilon.$$

Lemat 3. *Niech* $A \in \mathcal{P}(X)$ *i* $A_n \in \mathcal{P}(X)$ *oraz* $A_{n+1} \subseteq A_n$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Jeśli* $H(A_n, A) \to 0$ *to* $\overline{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$.

Wniosek 1. *Z twierdzenia 2 wynika klasyczne twierdzenie Cantora o przecięciu.*

Dowód. Gdy $A_{n+1} \subseteq A_n$ to $D(A_{n+1}, A_n) = 0$ więc

$$\sum_{n=1}^{\infty} D(A_{n+1}, A_n) = 0.$$

Z tw. 2, $H(A_n, \{a_*\}) \to 0$ dla pewnego $a_* \in X$. Z lematu 3 wynika, że $\{a_*\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Twierdzenie 3. *Załóżmy, że K jest niepustym, domkniętym podzbiorem przestrzeni metrycznej zupełnej (X,d), $T\colon K \to X$ i $\alpha := L(T) < 1$. Dla $x \in K$ połóżmy*

$$p(x) := \sup\{n \in \mathbb{N} : T^i x \in K \quad \textit{dla} \quad i = 0, 1, ..., n-1\}.$$

Wówczas T ma punkt stały wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki niepusty i ograniczony zbiór $K_0 \subseteq K$, że $\sup_{x \in K_0} p(x) = \infty$. Ponadto, jeśli zachodzi ostatni warunek to $\operatorname{Fix} T = \{x_*\}$ dla pewnego $x_* \in K$ oraz dla dowolnego $x \in K_0$ i $n \in \mathbb{N}$

$$\left(p(x) \geq n \Rightarrow d(T^n x, x_*) \leq \alpha^n \left(\operatorname{diam} K_0 + \frac{\operatorname{diam} K_0 \cup T(K_0)}{1-\alpha}\right)\right).$$

W szczególności, jeśli $K_0 = \{x_0\}$ to $d(T^n x_0, x_*) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, Tx_0)$.

Dowód. Stosujemy tw. 2 do ciągu $(K_n)_{n=0}^{\infty}$, gdzie dla $n \in \mathbb{N}$

$$K_n := T(K_{n-1}) \cap K.$$

Stosując twierdzenie 3 dwa razy (!) dostajemy

Wniosek 2. *Z tw. 3 wynika twierdzenie Reicha–Zaslavskiego. Ponadto przy założeniach tw. R–Z mamy:*

$$\forall M > 0 \ \forall (x_i)_{i=0}^{n} \subseteq K \ [(d(x_0, x_*) \leq M \ \textit{i} \ x_i = Tx_{i-1} \ \textit{dla} \ \ i = 1, ...n) \Rightarrow d(x_i, x_*) < 4M\frac{\alpha^i}{1-\alpha} \ \ \textit{dla} \ \ i = 1, ..., n].$$

Dowód. Stosujemy tw. 3 biorąc kolejno za K_0 zbiór K_0 z tw. R–Z, a następnie zbiór

$$K_0' := B(x_*, M) \cap K.$$

Wtedy $x_* \in K_0' \cap T(K_0')$ więc

$$\operatorname{diam} K_0' \cup T(K_0') \leq \operatorname{diam} K_0' + \operatorname{diam} T(K_0') \leq 2M + 2\alpha M.$$