

O poszukiwaniu stałej charakteryzującej punkty
wyjątkowe względem różnych baz różniczkowania.

Grażyna Horbaczewska
Uniwersytet Łódzki

Konopnica 2016

Niech $A \in \mathcal{L}$ i $x \in \mathbb{R}$

$$\underline{d}(A, x) := \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(A \cap (x - h, x + h))}{2h},$$

$$\overline{d}(A, x) := \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(A \cap (x - h, x + h))}{2h}.$$

$$0 \leq \underline{d}(A, x) \leq \overline{d}(A, x) \leq 1$$

Jeśli $\underline{d}(A, x) = \overline{d}(A, x)$, to wspólną wartość oznaczamy przez $d(A, x)$.

Jeśli $d(A, x) = 1$, to mówimy, że x jest punktem gęstości zbioru A .

Jeśli $d(A, x) = 0$, to mówimy, że x jest punktem rozrzedzenia zbioru A .

Niech $A \in \mathcal{L}$ i $x \in \mathbb{R}$

$$\underline{d}(A, x) := \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(A \cap (x - h, x + h))}{2h},$$

$$\overline{d}(A, x) := \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(A \cap (x - h, x + h))}{2h}.$$

$$0 \leq \underline{d}(A, x) \leq \overline{d}(A, x) \leq 1$$

Jeśli $\underline{d}(A, x) = \overline{d}(A, x)$, to wspólną wartość oznaczamy przez $d(A, x)$.

Jeśli $d(A, x) = 1$, to mówimy, że x jest punktem gęstości zbioru A .

Jeśli $d(A, x) = 0$, to mówimy, że x jest punktem rozrzedzenia zbioru A .

Niech $A \in \mathcal{L}$ i $x \in \mathbb{R}$

$$\underline{d}(A, x) := \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(A \cap (x - h, x + h))}{2h},$$

$$\overline{d}(A, x) := \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(A \cap (x - h, x + h))}{2h}.$$

$$0 \leq \underline{d}(A, x) \leq \overline{d}(A, x) \leq 1$$

Jeśli $\underline{d}(A, x) = \overline{d}(A, x)$, to wspólną wartość oznaczamy przez $d(A, x)$.

Jeśli $d(A, x) = 1$, to mówimy, że x jest punktem gęstości zbioru A .

Jeśli $d(A, x) = 0$, to mówimy, że x jest punktem rozrzedzenia zbioru A .

Niech $A \in \mathcal{L}$ i $x \in \mathbb{R}$

$$\underline{d}(A, x) := \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(A \cap (x - h, x + h))}{2h},$$

$$\overline{d}(A, x) := \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(A \cap (x - h, x + h))}{2h}.$$

$$0 \leq \underline{d}(A, x) \leq \overline{d}(A, x) \leq 1$$

Jeśli $\underline{d}(A, x) = \overline{d}(A, x)$, to wspólną wartość oznaczamy przez $d(A, x)$.

Jeśli $d(A, x) = 1$, to mówimy, że x jest punktem gęstości zbioru A .

Jeśli $d(A, x) = 0$, to mówimy, że x jest punktem rozrzedzenia zbioru A .

Niech $A \in \mathcal{L}$ i $x \in \mathbb{R}$

$$\underline{d}(A, x) := \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(A \cap (x - h, x + h))}{2h},$$

$$\overline{d}(A, x) := \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(A \cap (x - h, x + h))}{2h}.$$

$$0 \leq \underline{d}(A, x) \leq \overline{d}(A, x) \leq 1$$

Jeśli $\underline{d}(A, x) = \overline{d}(A, x)$, to wspólną wartość oznaczamy przez $d(A, x)$.

Jeśli $d(A, x) = 1$, to mówimy, że x jest punktem gęstości zbioru A .

Jeśli $d(A, x) = 0$, to mówimy, że x jest punktem rozrzedzenia zbioru A .

Niech $A \in \mathcal{L}$ i $x \in \mathbb{R}$

$$\underline{d}(A, x) := \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(A \cap (x - h, x + h))}{2h},$$

$$\overline{d}(A, x) := \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(A \cap (x - h, x + h))}{2h}.$$

$$0 \leq \underline{d}(A, x) \leq \overline{d}(A, x) \leq 1$$

Jeśli $\underline{d}(A, x) = \overline{d}(A, x)$, to wspólną wartość oznaczamy przez $d(A, x)$.

Jeśli $d(A, x) = 1$, to mówimy, że x jest punktem gęstości zbioru A .

Jeśli $d(A, x) = 0$, to mówimy, że x jest punktem rozrzedzenia zbioru A .

Twierdzenie Lebesgue'a

Twierdzenie

Prawie wszystkie punkty dowolnego mierzalnego podzbioru prostej są jego punktami gęstości lub rozrzedzenia.

$$\mathcal{L}^* := \{A \in \mathcal{L} : \lambda(A) > 0 \wedge \lambda(\mathbb{R} \setminus A) > 0\}$$

Kolyada:

Twierdzenie

Dowolny zbiór $A \in \mathcal{L}^*$ ma punkt wyjątkowy.

$$\mathcal{T}_d := \{A \in \mathcal{L} : \forall_{x \in A} d(A, x) = 1\}$$

Gdyby istniał zbiór $A \in \mathcal{L}^*$ taki, że

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} (d(A, x) = 1 \vee d(A, x) = 0),$$

to zbiory $Z := \{x \in \mathbb{R} : d(A, x) = 1\}$

i $\mathbb{R} \setminus Z = \{x \in \mathbb{R} : d(A, x) = 0\}$

przeciłyby spójności \mathbb{R} w \mathcal{T}_d .

$$\mathcal{L}^* := \{A \in \mathcal{L} : \lambda(A) > 0 \wedge \lambda(\mathbb{R} \setminus A) > 0\}$$

Kolyada:

Twierdzenie

Dowolny zbiór $A \in \mathcal{L}^*$ ma punkt wyjątkowy.

$$\mathcal{T}_d := \{A \in \mathcal{L} : \forall_{x \in A} d(A, x) = 1\}$$

Gdyby istniał zbiór $A \in \mathcal{L}^*$ taki, że

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} (d(A, x) = 1 \vee d(A, x) = 0),$$

to zbiory $Z := \{x \in \mathbb{R} : d(A, x) = 1\}$

i $\mathbb{R} \setminus Z = \{x \in \mathbb{R} : d(A, x) = 0\}$

przeciłyby spójności \mathbb{R} w \mathcal{T}_d .

$$\mathcal{L}^* := \{A \in \mathcal{L} : \lambda(A) > 0 \wedge \lambda(\mathbb{R} \setminus A) > 0\}$$

Kolyada:

Twierdzenie

Dowolny zbiór $A \in \mathcal{L}^*$ ma punkt wyjątkowy.

$$\mathcal{T}_d := \{A \in \mathcal{L} : \forall_{x \in A} d(A, x) = 1\}$$

Gdyby istniał zbiór $A \in \mathcal{L}^*$ taki, że

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} (d(A, x) = 1 \vee d(A, x) = 0),$$

to zbiory $Z := \{x \in \mathbb{R} : d(A, x) = 1\}$

i $\mathbb{R} \setminus Z = \{x \in \mathbb{R} : d(A, x) = 0\}$

przeciłyby spójności \mathbb{R} w \mathcal{T}_d .

$$\mathcal{L}^* := \{A \in \mathcal{L} : \lambda(A) > 0 \wedge \lambda(\mathbb{R} \setminus A) > 0\}$$

Kolyada:

Twierdzenie

Dowolny zbiór $A \in \mathcal{L}^*$ ma punkt wyjątkowy.

$$\mathcal{T}_d := \{A \in \mathcal{L} : \forall_{x \in A} d(A, x) = 1\}$$

Gdyby istniał zbiór $A \in \mathcal{L}^*$ taki, że

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} (d(A, x) = 1 \vee d(A, x) = 0),$$

to zbiory $Z := \{x \in \mathbb{R} : d(A, x) = 1\}$

i $\mathbb{R} \setminus Z = \{x \in \mathbb{R} : d(A, x) = 0\}$

przeciłyby spójności \mathbb{R} w \mathcal{T}_d .

$$\mathcal{L}^* := \{A \in \mathcal{L} : \lambda(A) > 0 \wedge \lambda(\mathbb{R} \setminus A) > 0\}$$

Kolyada:

Twierdzenie

Dowolny zbiór $A \in \mathcal{L}^*$ ma punkt wyjątkowy.

$$\mathcal{T}_d := \{A \in \mathcal{L} : \forall_{x \in A} d(A, x) = 1\}$$

Gdyby istniał zbiór $A \in \mathcal{L}^*$ taki, że

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} (d(A, x) = 1 \vee d(A, x) = 0),$$

to zbiory $Z := \{x \in \mathbb{R} : d(A, x) = 1\}$

i $\mathbb{R} \setminus Z = \{x \in \mathbb{R} : d(A, x) = 0\}$

przeciłyby spójności \mathbb{R} w \mathcal{T}_d .

$$\mathcal{L}^* := \{A \in \mathcal{L} : \lambda(A) > 0 \wedge \lambda(\mathbb{R} \setminus A) > 0\}$$

Kolyada:

Twierdzenie

Dowolny zbiór $A \in \mathcal{L}^*$ ma punkt wyjątkowy.

$$\mathcal{T}_d := \{A \in \mathcal{L} : \forall_{x \in A} d(A, x) = 1\}$$

Gdyby istniał zbiór $A \in \mathcal{L}^*$ taki, że

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} (d(A, x) = 1 \vee d(A, x) = 0),$$

to zbiory $Z := \{x \in \mathbb{R} : d(A, x) = 1\}$

i $\mathbb{R} \setminus Z = \{x \in \mathbb{R} : d(A, x) = 0\}$

przeczyłyby spójności \mathbb{R} w \mathcal{T}_d .

$$\mathcal{L}^* := \{A \in \mathcal{L} : \lambda(A) > 0 \wedge \lambda(\mathbb{R} \setminus A) > 0\}$$

Kolyada:

Twierdzenie

Dowolny zbiór $A \in \mathcal{L}^*$ ma punkt wyjątkowy.

$$\mathcal{T}_d := \{A \in \mathcal{L} : \forall_{x \in A} d(A, x) = 1\}$$

Gdyby istniał zbiór $A \in \mathcal{L}^*$ taki, że

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} (d(A, x) = 1 \vee d(A, x) = 0),$$

to zbiory $Z := \{x \in \mathbb{R} : d(A, x) = 1\}$

i $\mathbb{R} \setminus Z = \{x \in \mathbb{R} : d(A, x) = 0\}$

przeczyłyby spójności \mathbb{R} w \mathcal{T}_d .

$$\delta \in [0, 1/2)$$

$$\mathcal{H}(\delta) : \quad \forall_{A \in \mathcal{L}^*} \exists_{x \in \mathbb{R}} \delta \leq \underline{d}(A, x) \leq \bar{d}(A, x) \leq 1 - \delta.$$

Mówimy, że $x \in \mathbb{R}$ jest δ -wyjątkowy, jeśli

$$\delta \leq \underline{d}(A, x) \leq \bar{d}(A, x) \leq 1 - \delta.$$

Jeśli $\delta_1 > \delta_2$, to $\mathcal{H}(\delta_1) \Rightarrow \mathcal{H}(\delta_2)$.

$$\delta_{\mathcal{H}} := \sup\{\delta \in [0, 1/2) : \mathcal{H}_B(\delta)\}$$

$$\delta_{\mathcal{H}} = ?$$

$$\delta \in [0, 1/2)$$

$$\mathcal{H}(\delta) : \quad \forall_{A \in \mathcal{L}^*} \exists_{x \in \mathbb{R}} \delta \leq \underline{d}(A, x) \leq \bar{d}(A, x) \leq 1 - \delta.$$

Mówimy, że $x \in \mathbb{R}$ jest δ -wyjątkowy, jeśli

$$\delta \leq \underline{d}(A, x) \leq \bar{d}(A, x) \leq 1 - \delta.$$

Jeśli $\delta_1 > \delta_2$, to $\mathcal{H}(\delta_1) \Rightarrow \mathcal{H}(\delta_2)$.

$$\delta_{\mathcal{H}} := \sup\{\delta \in [0, 1/2) : \mathcal{H}_B(\delta)\}$$

$$\delta_{\mathcal{H}} = ?$$

$$\delta \in [0, 1/2)$$

$$\mathcal{H}(\delta) : \quad \forall_{A \in \mathcal{L}^*} \exists_{x \in \mathbb{R}} \delta \leq \underline{d}(A, x) \leq \bar{d}(A, x) \leq 1 - \delta.$$

Mówimy, że $x \in \mathbb{R}$ jest δ -wyjątkowy, jeśli

$$\delta \leq \underline{d}(A, x) \leq \bar{d}(A, x) \leq 1 - \delta.$$

Jeśli $\delta_1 > \delta_2$, to $\mathcal{H}(\delta_1) \Rightarrow \mathcal{H}(\delta_2)$.

$$\delta_{\mathcal{H}} := \sup\{\delta \in [0, 1/2) : \mathcal{H}_B(\delta)\}$$

$$\delta_{\mathcal{H}} = ?$$

$$\delta \in [0, 1/2)$$

$$\mathcal{H}(\delta) : \quad \forall_{A \in \mathcal{L}^*} \exists_{x \in \mathbb{R}} \delta \leq \underline{d}(A, x) \leq \bar{d}(A, x) \leq 1 - \delta.$$

Mówimy, że $x \in \mathbb{R}$ jest δ -wyjątkowy, jeśli

$$\delta \leq \underline{d}(A, x) \leq \bar{d}(A, x) \leq 1 - \delta.$$

Jeśli $\delta_1 > \delta_2$, to $\mathcal{H}(\delta_1) \Rightarrow \mathcal{H}(\delta_2)$.

$$\delta_{\mathcal{H}} := \sup\{\delta \in [0, 1/2) : \mathcal{H}_B(\delta)\}$$

$$\delta_{\mathcal{H}} = ?$$

$$\delta \in [0, 1/2)$$

$$\mathcal{H}(\delta) : \quad \forall_{A \in \mathcal{L}^*} \exists_{x \in \mathbb{R}} \delta \leq \underline{d}(A, x) \leq \bar{d}(A, x) \leq 1 - \delta.$$

Mówimy, że $x \in \mathbb{R}$ jest δ -wyjątkowy, jeśli

$$\delta \leq \underline{d}(A, x) \leq \bar{d}(A, x) \leq 1 - \delta.$$

Jeśli $\delta_1 > \delta_2$, to $\mathcal{H}(\delta_1) \Rightarrow \mathcal{H}(\delta_2)$.

$$\delta_{\mathcal{H}} := \sup\{\delta \in [0, 1/2) : \mathcal{H}_B(\delta)\}$$

$$\delta_{\mathcal{H}} = ?$$

$$\mathcal{H}(\delta) : \quad \forall_{A \in \mathcal{L}^*} \exists_{x \in \mathbb{R}} \delta \leq \underline{d}(A, x) \leq \overline{d}(A, x) \leq 1 - \delta,$$

Kolyada 1983

$$1/4 \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq (\sqrt{17} - 3)/4 \sim 0.2807764$$

$$\mathcal{H}(\delta) : \quad \forall_{A \in \mathcal{L}^*} \exists_{x \in \mathbb{R}} \delta \leq \underline{d}(A, x) \leq \overline{d}(A, x) \leq 1 - \delta,$$

Kolyada 1983

$$1/4 \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq (\sqrt{17} - 3)/4 \sim 0.2807764$$

$$\mathcal{H}(\delta) : \quad \forall_{A \in \mathcal{L}^*} \exists_{x \in \mathbb{R}} \delta \leq \underline{d}(A, x) \leq \overline{d}(A, x) \leq 1 - \delta,$$

Kolyada 1983

$$1/4 \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq (\sqrt{17} - 3)/4 \sim 0.2807764$$

Kombinatoryczne przeformułowanie problemu

Konfiguracją nazywamy sumę przedziałów

$$C := (-\infty, 0) \cup \bigcup_{i=1}^r (a_i, b_i),$$

gdzie $0 < a_1 < b_1 < \dots < a_r < b_r$, a końce przedziałów, łącznie z 0, nazywamy wierzchołkami konfiguracji C .

Zbiór wszystkich wierzchołków konfiguracji C oznaczamy przez $v(C)$.

Niech $\delta \in [0, 1/2)$,

$\mathcal{K}(\delta)$: dla dowolnej konfiguracji C , istnieje wierzchołek $v \in v(C)$ taki, że

$$\delta \leq \frac{\lambda(C \cap (v - \omega, v + \omega))}{2\omega} \leq 1 - \delta \quad \text{dla dowolnego } \omega > 0.$$

$$\delta_{\mathcal{K}} := \sup\{\delta > 0 : \mathcal{K}(\delta)\}.$$

Twierdzenie

$$\delta_{\mathcal{H}} = \delta_{\mathcal{K}}.$$

Kombinatoryczne przeformułowanie problemu

Konfiguracją nazywamy sumę przedziałów

$$C := (-\infty, 0) \cup \bigcup_{i=1}^r (a_i, b_i),$$

gdzie $0 < a_1 < b_1 < \dots < a_r < b_r$, a końce przedziałów, łącznie z 0, nazywamy wierzchołkami konfiguracji C .

Zbiór wszystkich wierzchołków konfiguracji C oznaczamy przez $v(C)$.

Niech $\delta \in [0, 1/2)$,

$\mathcal{K}(\delta)$: dla dowolnej konfiguracji C , istnieje wierzchołek $v \in v(C)$ taki, że

$$\delta \leq \frac{\lambda(C \cap (v - \omega, v + \omega))}{2\omega} \leq 1 - \delta \quad \text{dla dowolnego } \omega > 0.$$

$$\delta_{\mathcal{K}} := \sup\{\delta > 0 : \mathcal{K}(\delta)\}.$$

Twierdzenie

$$\delta_{\mathcal{H}} = \delta_{\mathcal{K}}.$$

Kombinatoryczne przeformułowanie problemu

Konfiguracją nazywamy sumę przedziałów

$$C := (-\infty, 0) \cup \bigcup_{i=1}^r (a_i, b_i),$$

gdzie $0 < a_1 < b_1 < \dots < a_r < b_r$, a końce przedziałów, łącznie z 0, nazywamy wierzchołkami konfiguracji C .

Zbiór wszystkich wierzchołków konfiguracji C oznaczamy przez $v(C)$.

Niech $\delta \in [0, 1/2)$,

$\mathcal{K}(\delta)$: dla dowolnej konfiguracji C , istnieje wierzchołek $v \in v(C)$ taki, że

$$\delta \leq \frac{\lambda(C \cap (v - \omega, v + \omega))}{2\omega} \leq 1 - \delta \quad \text{dla dowolnego } \omega > 0.$$

$$\delta_{\mathcal{K}} := \sup\{\delta > 0 : \mathcal{K}(\delta)\}.$$

Twierdzenie

$$\delta_{\mathcal{H}} = \delta_{\mathcal{K}}.$$

Kombinatoryczne przeformułowanie problemu

Konfiguracją nazywamy sumę przedziałów

$$C := (-\infty, 0) \cup \bigcup_{i=1}^r (a_i, b_i),$$

gdzie $0 < a_1 < b_1 < \dots < a_r < b_r$, a końce przedziałów, łącznie z 0, nazywamy wierzchołkami konfiguracji C .

Zbiór wszystkich wierzchołków konfiguracji C oznaczamy przez $v(C)$.

Niech $\delta \in [0, 1/2)$,

$\mathcal{K}(\delta)$: dla dowolnej konfiguracji C , istnieje wierzchołek $v \in v(C)$ taki, że

$$\delta \leq \frac{\lambda(C \cap (v - \omega, v + \omega))}{2\omega} \leq 1 - \delta \quad \text{dla dowolnego } \omega > 0.$$

$$\delta_{\mathcal{K}} := \sup\{\delta > 0 : \mathcal{K}(\delta)\}.$$

Twierdzenie

$$\delta_{\mathcal{H}} = \delta_{\mathcal{K}}.$$

Kombinatoryczne przeformułowanie problemu

Konfiguracją nazywamy sumę przedziałów

$$C := (-\infty, 0) \cup \bigcup_{i=1}^r (a_i, b_i),$$

gdzie $0 < a_1 < b_1 < \dots < a_r < b_r$, a końce przedziałów, łącznie z 0, nazywamy wierzchołkami konfiguracji C .

Zbiór wszystkich wierzchołków konfiguracji C oznaczamy przez $v(C)$.

Niech $\delta \in [0, 1/2)$,

$\mathcal{K}(\delta)$: dla dowolnej konfiguracji C , istnieje wierzchołek $v \in v(C)$ taki, że

$$\delta \leq \frac{\lambda(C \cap (v - \omega, v + \omega))}{2\omega} \leq 1 - \delta \quad \text{dla dowolnego } \omega > 0.$$

$$\delta_{\mathcal{K}} := \sup\{\delta > 0 : \mathcal{K}(\delta)\}.$$

Twierdzenie

$$\delta_{\mathcal{H}} = \delta_{\mathcal{K}}.$$

Kolyada 1983: $1/4 \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq (\sqrt{17} - 3)/4 \sim 0.2807764$

Szenes 2011:

Twierdzenie

Jeśli $4\delta^3 + 2\delta^2 + 3\delta < 1$, to $\mathcal{K}(\delta)$ jest prawdziwe.

$$\delta_{\mathcal{K}} \geq 0.2629\dots$$

Twierdzenie

Jeśli $(2\delta)^3 + (2\delta)^2 + 2\delta > 1$, to $\mathcal{K}(\delta)$ jest fałszywe.

$$\delta_{\mathcal{K}} \leq 0.27184\dots$$

Hipoteza Szenesa:

Uniwersalna stała $\delta_{\mathcal{K}}$ jest jedynym pierwiastkiem rzeczywistym równania:

$$(2\delta)^3 + (2\delta)^2 + 2\delta = 1.$$

Csorney, Grahl, O'Neil 2012:

Twierdzenie

Jeśli $2\delta^3 + 2\delta^2 + 3\delta > 1$, to $\mathcal{K}(\delta)$ jest fałszywe.

Kolyada 1983: $1/4 \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq (\sqrt{17} - 3)/4 \sim 0.2807764$

Szenes 2011:

Twierdzenie

Jeśli $4\delta^3 + 2\delta^2 + 3\delta < 1$, to $\mathcal{K}(\delta)$ jest prawdziwe.

$$\delta_{\mathcal{K}} \geq 0.2629\dots$$

Twierdzenie

Jeśli $(2\delta)^3 + (2\delta)^2 + 2\delta > 1$, to $\mathcal{K}(\delta)$ jest fałszywe.

$$\delta_{\mathcal{K}} \leq 0.27184\dots$$

Hipoteza Szenesa:

Uniwersalna stała $\delta_{\mathcal{K}}$ jest jedynym pierwiastkiem rzeczywistym równania:

$$(2\delta)^3 + (2\delta)^2 + 2\delta = 1.$$

Csorney, Grahl, O'Neil 2012:

Twierdzenie

Jeśli $2\delta^3 + 2\delta^2 + 3\delta > 1$, to $\mathcal{K}(\delta)$ jest fałszywe.

Kolyada 1983: $1/4 \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq (\sqrt{17} - 3)/4 \sim 0.2807764$

Szenes 2011:

Twierdzenie

Jeśli $4\delta^3 + 2\delta^2 + 3\delta < 1$, to $\mathcal{K}(\delta)$ jest prawdziwe.

$$\delta_{\mathcal{K}} \geq 0.2629\dots$$

Twierdzenie

Jeśli $(2\delta)^3 + (2\delta)^2 + 2\delta > 1$, to $\mathcal{K}(\delta)$ jest fałszywe.

$$\delta_{\mathcal{K}} \leq 0.27184\dots$$

Hipoteza Szenesa:

Uniwersalna stała $\delta_{\mathcal{K}}$ jest jedynym pierwiastkiem rzeczywistym równania:

$$(2\delta)^3 + (2\delta)^2 + 2\delta = 1.$$

Csorney, Grahl, O'Neil 2012:

Twierdzenie

Jeśli $2\delta^3 + 2\delta^2 + 3\delta > 1$, to $\mathcal{K}(\delta)$ jest fałszywe.

Kolyada 1983: $1/4 \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq (\sqrt{17} - 3)/4 \sim 0.2807764$

Szenes 2011:

Twierdzenie

Jeśli $4\delta^3 + 2\delta^2 + 3\delta < 1$, to $\mathcal{K}(\delta)$ jest prawdziwe.

$$\delta_{\mathcal{K}} \geq 0.2629\dots$$

Twierdzenie

Jeśli $(2\delta)^3 + (2\delta)^2 + 2\delta > 1$, to $\mathcal{K}(\delta)$ jest fałszywe.

$$\delta_{\mathcal{K}} \leq 0.27184\dots$$

Hipoteza Szenesa:

Uniwersalna stała $\delta_{\mathcal{K}}$ jest jedynym pierwiastkiem rzeczywistym równania:

$$(2\delta)^3 + (2\delta)^2 + 2\delta = 1.$$

Csorney, Grahl, O'Neil 2012:

Twierdzenie

Jeśli $2\delta^3 + 2\delta^2 + 3\delta > 1$, to $\mathcal{K}(\delta)$ jest fałszywe.

Kolyada 1983: $1/4 \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq (\sqrt{17} - 3)/4 \sim 0.2807764$

Szenes 2011:

Twierdzenie

Jeśli $4\delta^3 + 2\delta^2 + 3\delta < 1$, to $\mathcal{K}(\delta)$ jest prawdziwe.

$$\delta_{\mathcal{K}} \geq 0.2629\dots$$

Twierdzenie

Jeśli $(2\delta)^3 + (2\delta)^2 + 2\delta > 1$, to $\mathcal{K}(\delta)$ jest fałszywe.

$$\delta_{\mathcal{K}} \leq 0.27184\dots$$

Hipoteza Szenesa:

Uniwersalna stała $\delta_{\mathcal{K}}$ jest jedynym pierwiastkiem rzeczywistym równania:

$$(2\delta)^3 + (2\delta)^2 + 2\delta = 1.$$

Csorney, Grahl, O'Neil 2012:

Twierdzenie

Jeśli $2\delta^3 + 2\delta^2 + 3\delta > 1$, to $\mathcal{K}(\delta)$ jest fałszywe.

Kolyada 1983: $1/4 \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq (\sqrt{17} - 3)/4 \sim 0.2807764$

Szenes 2011:

Twierdzenie

Jeśli $4\delta^3 + 2\delta^2 + 3\delta < 1$, to $\mathcal{K}(\delta)$ jest prawdziwe.

$$\delta_{\mathcal{K}} \geq 0.2629\dots$$

Twierdzenie

Jeśli $(2\delta)^3 + (2\delta)^2 + 2\delta > 1$, to $\mathcal{K}(\delta)$ jest fałszywe.

$$\delta_{\mathcal{K}} \leq 0.27184\dots$$

Hipoteza Szenesa:

Uniwersalna stała $\delta_{\mathcal{K}}$ jest jedynym pierwiastkiem rzeczywistym równania:

$$(2\delta)^3 + (2\delta)^2 + 2\delta = 1.$$

Csorney, Grahl, O'Neil 2012:

Twierdzenie

Jeśli $2\delta^3 + 2\delta^2 + 3\delta > 1$, to $\mathcal{K}(\delta)$ jest fałszywe.

Kolyada 1983: $1/4 \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq (\sqrt{17} - 3)/4 \sim 0.2807764$

Szenes 2011:

Twierdzenie

Jeśli $4\delta^3 + 2\delta^2 + 3\delta < 1$, to $\mathcal{K}(\delta)$ jest prawdziwe.

$$\delta_{\mathcal{K}} \geq 0.2629\dots$$

Twierdzenie

Jeśli $(2\delta)^3 + (2\delta)^2 + 2\delta > 1$, to $\mathcal{K}(\delta)$ jest fałszywe.

$$\delta_{\mathcal{K}} \leq 0.27184\dots$$

Hipoteza Szenesa:

Uniwersalna stała $\delta_{\mathcal{K}}$ jest jedynym pierwiastkiem rzeczywistym równania:

$$(2\delta)^3 + (2\delta)^2 + 2\delta = 1.$$

Csorney, Grahl, O'Neil 2012:

Twierdzenie

Jeśli $2\delta^3 + 2\delta^2 + 3\delta > 1$, to $\mathcal{K}(\delta)$ jest fałszywe.

Kolyada 1983: $1/4 \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq (\sqrt{17} - 3)/4 \sim 0.2807764$

Szenes 2011:

Twierdzenie

Jeśli $4\delta^3 + 2\delta^2 + 3\delta < 1$, to $\mathcal{K}(\delta)$ jest prawdziwe.

$$\delta_{\mathcal{K}} \geq 0.2629\dots$$

Twierdzenie

Jeśli $(2\delta)^3 + (2\delta)^2 + 2\delta > 1$, to $\mathcal{K}(\delta)$ jest fałszywe.

$$\delta_{\mathcal{K}} \leq 0.27184\dots$$

Hipoteza Szenesa:

Uniwersalna stała $\delta_{\mathcal{K}}$ jest jedynym pierwiastkiem rzeczywistym równania:

$$(2\delta)^3 + (2\delta)^2 + 2\delta = 1.$$

Csorney, Grahl, O'Neil 2012:

Twierdzenie

Jeśli $2\delta^3 + 2\delta^2 + 3\delta > 1$, to $\mathcal{K}(\delta)$ jest fałszywe.

Kolyada:

$$1/4 \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq (\sqrt{17} - 3)/4 \sim 0.2807764$$

Szenes:

$$0.2629... \leq \delta_{\mathcal{K}} \leq 0.27184...$$

Csorney, Grahl, O'Neil:

$$\delta_{\mathcal{K}} \leq 0.27106...$$

Kurka 2012:

Twierdzenie

Jeśli $8\delta^3 + 8\delta^2 + \delta > 1$, to $\mathcal{K}(\delta)$ jest fałszywe.

$$\delta_{\mathcal{K}} \leq 0.2684...$$

Twierdzenie

Uniwersalna stała $\delta_{\mathcal{K}}$ jest jedynym pierwiastkiem rzeczywistym równania:

$$8\delta^3 + 8\delta^2 + \delta = 1.$$

$$\delta_{\mathcal{K}} \sim 0.2684...$$

Kolyada:

$$1/4 \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq (\sqrt{17} - 3)/4 \sim 0.2807764$$

Szenes:

$$0.2629... \leq \delta_{\mathcal{K}} \leq 0.27184...$$

Csorney, Grahl, O'Neil:

$$\delta_{\mathcal{K}} \leq 0.27106...$$

Kurka 2012:

Twierdzenie

Jeśli $8\delta^3 + 8\delta^2 + \delta > 1$, to $\mathcal{K}(\delta)$ jest fałszywe.

$$\delta_{\mathcal{K}} \leq 0.2684...$$

Twierdzenie

Uniwersalna stała $\delta_{\mathcal{K}}$ jest jedynym pierwiastkiem rzeczywistym równania:

$$8\delta^3 + 8\delta^2 + \delta = 1.$$

$$\delta_{\mathcal{K}} \sim 0.2684...$$

Kolyada:

$$1/4 \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq (\sqrt{17} - 3)/4 \sim 0.2807764$$

Szenes:

$$0.2629... \leq \delta_{\mathcal{K}} \leq 0.27184...$$

Csorney, Grahl, O'Neil:

$$\delta_{\mathcal{K}} \leq 0.27106...$$

Kurka 2012:

Twierdzenie

Jeśli $8\delta^3 + 8\delta^2 + \delta > 1$, to $\mathcal{K}(\delta)$ jest fałszywe.

$$\delta_{\mathcal{K}} \leq 0.2684...$$

Twierdzenie

Uniwersalna stała $\delta_{\mathcal{K}}$ jest jedynym pierwiastkiem rzeczywistym równania:

$$8\delta^3 + 8\delta^2 + \delta = 1.$$

$$\delta_{\mathcal{K}} \sim 0.2684...$$

Kolyada:

$$1/4 \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq (\sqrt{17} - 3)/4 \sim 0.2807764$$

Szenes:

$$0.2629... \leq \delta_{\mathcal{K}} \leq 0.27184...$$

Csorney, Grahl, O'Neil:

$$\delta_{\mathcal{K}} \leq 0.27106...$$

Kurka 2012:

Twierdzenie

Jeśli $8\delta^3 + 8\delta^2 + \delta > 1$, to $\mathcal{K}(\delta)$ jest fałszywe.

$$\delta_{\mathcal{K}} \leq 0.2684...$$

Twierdzenie

Uniwersalna stała $\delta_{\mathcal{K}}$ jest jedynym pierwiastkiem rzeczywistym równania:

$$8\delta^3 + 8\delta^2 + \delta = 1.$$

$$\delta_{\mathcal{K}} \sim 0.2684...$$

Kolyada:

$$1/4 \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq (\sqrt{17} - 3)/4 \sim 0.2807764$$

Szenes:

$$0.2629... \leq \delta_{\mathcal{K}} \leq 0.27184...$$

Csorney, Grahl, O'Neil:

$$\delta_{\mathcal{K}} \leq 0.27106...$$

Kurka 2012:

Twierdzenie

Jeśli $8\delta^3 + 8\delta^2 + \delta > 1$, to $\mathcal{K}(\delta)$ jest fałszywe.

$$\delta_{\mathcal{K}} \leq 0.2684...$$

Twierdzenie

Uniwersalna stała $\delta_{\mathcal{K}}$ jest jedynym pierwiastkiem rzeczywistym równania:

$$8\delta^3 + 8\delta^2 + \delta = 1.$$

$$\delta_{\mathcal{K}} \sim 0.2684...$$

M. Filipczak, T. Filipczak, G. H., W. Wilczyński

Remarks on exceptional points and differentiation bases Acta Math. Hungar.

Bazą różniczkowania \mathcal{B} nazywamy rodzinę $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}^x : x \in \mathbb{R}\}$, gdzie \mathcal{B}^x jest rodziną przedziałów zawierających x , o tej własności, że kres dolny ich długości jest równy 0.

Jeżeli F jest funkcją przedziału, to zapis $\lim_{I \in \mathcal{B}^x, I \rightarrow x} F(I) = g$ oznacza, że

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall I \in \mathcal{B}^x (\lambda(I) < \delta \Rightarrow |F(I) - g| < \varepsilon).$$

Górne i dolne granice względem danej bazy definiuje się analogicznie.

Dla bazy \mathcal{B} niech

$$\underline{d}_{\mathcal{B}}(A, x) := \liminf_{I \in \mathcal{B}^x, I \rightarrow x} \frac{\lambda(A \cap I)}{\lambda(I)}$$

i

$$\overline{d}_{\mathcal{B}}(A, x) := \limsup_{I \in \mathcal{B}^x, I \rightarrow x} \frac{\lambda(A \cap I)}{\lambda(I)}.$$

Jeśli $\underline{d}_{\mathcal{B}}(A, x) = \overline{d}_{\mathcal{B}}(A, x)$, to wspólną wartość oznaczamy $d_{\mathcal{B}}(A, x)$.

Zatem $\underline{d}(A, x)$ i $\overline{d}(A, x)$ oznaczają, odpowiednio, $\underline{d}_{\mathcal{B}_o}(A, x)$ i $\overline{d}_{\mathcal{B}_o}(A, x)$, gdzie \mathcal{B}_o jest zwykłą bazą różniczkowania złożoną z przedziałów $I = (x - h, x + h)$, $h > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

M. Filipczak, T. Filipczak, G. H., W. Wilczyński

Remarks on exceptional points and differentiation bases Acta Math. Hungar.

Bazą różniczkowania \mathcal{B} nazywamy rodzinę $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}^x : x \in \mathbb{R}\}$, gdzie \mathcal{B}^x jest rodziną przedziałów zawierających x , o tej własności, że kres dolny ich długości jest równy 0.

Jeżeli F jest funkcją przedziału, to zapis $\lim_{I \in \mathcal{B}^x, I \rightarrow x} F(I) = g$ oznacza, że

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall I \in \mathcal{B}^x (\lambda(I) < \delta \Rightarrow |F(I) - g| < \varepsilon).$$

Górne i dolne granice względem danej bazy definiuje się analogicznie.

Dla bazy \mathcal{B} niech

$$\underline{d}_{\mathcal{B}}(A, x) := \liminf_{I \in \mathcal{B}^x, I \rightarrow x} \frac{\lambda(A \cap I)}{\lambda(I)}$$

i

$$\overline{d}_{\mathcal{B}}(A, x) := \limsup_{I \in \mathcal{B}^x, I \rightarrow x} \frac{\lambda(A \cap I)}{\lambda(I)}.$$

Jeśli $\underline{d}_{\mathcal{B}}(A, x) = \overline{d}_{\mathcal{B}}(A, x)$, to wspólną wartość oznaczamy $d_{\mathcal{B}}(A, x)$.

Zatem $\underline{d}(A, x)$ i $\overline{d}(A, x)$ oznaczają, odpowiednio, $\underline{d}_{\mathcal{B}_o}(A, x)$ i $\overline{d}_{\mathcal{B}_o}(A, x)$, gdzie \mathcal{B}_o jest zwykłą bazą różniczkowania złożoną z przedziałów $I = (x - h, x + h)$, $h > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

M. Filipczak, T. Filipczak, G. H., W. Wilczyński

Remarks on exceptional points and differentiation bases Acta Math. Hungar.

Bazą różniczkowania \mathcal{B} nazywamy rodzinę $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}^x : x \in \mathbb{R}\}$, gdzie \mathcal{B}^x jest rodziną przedziałów zawierających x , o tej własności, że kres dolny ich długości jest równy 0.

Jeżeli F jest funkcją przedziału, to zapis $\lim_{I \in \mathcal{B}^x, I \rightarrow x} F(I) = g$ oznacza, że

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall I \in \mathcal{B}^x (\lambda(I) < \delta \Rightarrow |F(I) - g| < \varepsilon).$$

Górne i dolne granice względem danej bazy definiuje się analogicznie.

Dla bazy \mathcal{B} niech

$$\underline{d}_{\mathcal{B}}(A, x) := \liminf_{I \in \mathcal{B}^x, I \rightarrow x} \frac{\lambda(A \cap I)}{\lambda(I)}$$

i

$$\overline{d}_{\mathcal{B}}(A, x) := \limsup_{I \in \mathcal{B}^x, I \rightarrow x} \frac{\lambda(A \cap I)}{\lambda(I)}.$$

Jeśli $\underline{d}_{\mathcal{B}}(A, x) = \overline{d}_{\mathcal{B}}(A, x)$, to wspólną wartość oznaczamy $d_{\mathcal{B}}(A, x)$.

Zatem $\underline{d}(A, x)$ i $\overline{d}(A, x)$ oznaczają, odpowiednio, $\underline{d}_{\mathcal{B}_o}(A, x)$ i $\overline{d}_{\mathcal{B}_o}(A, x)$, gdzie \mathcal{B}_o jest zwykłą bazą różniczkowania złożoną z przedziałów $I = (x - h, x + h)$, $h > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

M. Filipczak, T. Filipczak, G. H., W. Wilczyński

Remarks on exceptional points and differentiation bases Acta Math. Hungar.

Bazą różniczkowania \mathcal{B} nazywamy rodzinę $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}^x : x \in \mathbb{R}\}$, gdzie \mathcal{B}^x jest rodziną przedziałów zawierających x , o tej własności, że kres dolny ich długości jest równy 0.

Jeżeli F jest funkcją przedziału, to zapis $\lim_{I \in \mathcal{B}^x, I \rightarrow x} F(I) = g$ oznacza, że

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall I \in \mathcal{B}^x (\lambda(I) < \delta \Rightarrow |F(I) - g| < \varepsilon).$$

Górne i dolne granice względem danej bazy definiuje się analogicznie.

Dla bazy \mathcal{B} niech

$$\underline{d}_{\mathcal{B}}(A, x) := \liminf_{I \in \mathcal{B}^x, I \rightarrow x} \frac{\lambda(A \cap I)}{\lambda(I)}$$

i

$$\overline{d}_{\mathcal{B}}(A, x) := \limsup_{I \in \mathcal{B}^x, I \rightarrow x} \frac{\lambda(A \cap I)}{\lambda(I)}.$$

Jeśli $\underline{d}_{\mathcal{B}}(A, x) = \overline{d}_{\mathcal{B}}(A, x)$, to wspólną wartość oznaczamy $d_{\mathcal{B}}(A, x)$.

Zatem $\underline{d}(A, x)$ i $\overline{d}(A, x)$ oznaczają, odpowiednio, $\underline{d}_{\mathcal{B}_o}(A, x)$ i $\overline{d}_{\mathcal{B}_o}(A, x)$, gdzie \mathcal{B}_o jest zwykłą bazą różniczkowania złożoną z przedziałów $I = (x - h, x + h)$, $h > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

M. Filipczak, T. Filipczak, G. H., W. Wilczyński

Remarks on exceptional points and differentiation bases Acta Math. Hungar.

Bazą różniczkowania \mathcal{B} nazywamy rodzinę $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}^x : x \in \mathbb{R}\}$, gdzie \mathcal{B}^x jest rodziną przedziałów zawierających x , o tej własności, że kres dolny ich długości jest równy 0.

Jeżeli F jest funkcją przedziału, to zapis $\lim_{I \in \mathcal{B}^x, I \rightarrow x} F(I) = g$ oznacza, że

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall I \in \mathcal{B}^x (\lambda(I) < \delta \Rightarrow |F(I) - g| < \varepsilon).$$

Górne i dolne granice względem danej bazy definiuje się analogicznie.

Dla bazy \mathcal{B} niech

$$\underline{d}_{\mathcal{B}}(A, x) := \liminf_{I \in \mathcal{B}^x, I \rightarrow x} \frac{\lambda(A \cap I)}{\lambda(I)}$$

i

$$\overline{d}_{\mathcal{B}}(A, x) := \limsup_{I \in \mathcal{B}^x, I \rightarrow x} \frac{\lambda(A \cap I)}{\lambda(I)}.$$

Jeśli $\underline{d}_{\mathcal{B}}(A, x) = \overline{d}_{\mathcal{B}}(A, x)$, to wspólną wartość oznaczamy $d_{\mathcal{B}}(A, x)$.

Zatem $\underline{d}(A, x)$ i $\overline{d}(A, x)$ oznaczają, odpowiednio, $\underline{d}_{\mathcal{B}_o}(A, x)$ i $\overline{d}_{\mathcal{B}_o}(A, x)$, gdzie \mathcal{B}_o jest zwykłą bazą różniczkowania złożoną z przedziałów $I = (x - h, x + h)$, $h > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

M. Filipczak, T. Filipczak, G. H., W. Wilczyński

Remarks on exceptional points and differentiation bases Acta Math. Hungar.

Bazą różniczkowania \mathcal{B} nazywamy rodzinę $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}^x : x \in \mathbb{R}\}$, gdzie \mathcal{B}^x jest rodziną przedziałów zawierających x , o tej własności, że kres dolny ich długości jest równy 0.

Jeżeli F jest funkcją przedziału, to zapis $\lim_{I \in \mathcal{B}^x, I \rightarrow x} F(I) = g$ oznacza, że

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall I \in \mathcal{B}^x (\lambda(I) < \delta \Rightarrow |F(I) - g| < \varepsilon).$$

Górne i dolne granice względem danej bazy definiuje się analogicznie.

Dla bazy \mathcal{B} niech

$$\underline{d}_{\mathcal{B}}(A, x) := \liminf_{I \in \mathcal{B}^x, I \rightarrow x} \frac{\lambda(A \cap I)}{\lambda(I)}$$

i

$$\overline{d}_{\mathcal{B}}(A, x) := \limsup_{I \in \mathcal{B}^x, I \rightarrow x} \frac{\lambda(A \cap I)}{\lambda(I)}.$$

Jeśli $\underline{d}_{\mathcal{B}}(A, x) = \overline{d}_{\mathcal{B}}(A, x)$, to wspólną wartość oznaczamy $d_{\mathcal{B}}(A, x)$.

Zatem $\underline{d}(A, x)$ i $\overline{d}(A, x)$ oznaczają, odpowiednio, $\underline{d}_{\mathcal{B}_o}(A, x)$ i $\overline{d}_{\mathcal{B}_o}(A, x)$, gdzie \mathcal{B}_o jest zwykłą bazą różniczkowania złożoną z przedziałów $I = (x - h, x + h)$, $h > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

M. Filipczak, T. Filipczak, G. H., W. Wilczyński

Remarks on exceptional points and differentiation bases Acta Math. Hungar.

Bazą różniczkowania \mathcal{B} nazywamy rodzinę $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}^x : x \in \mathbb{R}\}$, gdzie \mathcal{B}^x jest rodziną przedziałów zawierających x , o tej własności, że kres dolny ich długości jest równy 0.

Jeżeli F jest funkcją przedziału, to zapis $\lim_{I \in \mathcal{B}^x, I \rightarrow x} F(I) = g$ oznacza, że

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall I \in \mathcal{B}^x (\lambda(I) < \delta \Rightarrow |F(I) - g| < \varepsilon).$$

Górne i dolne granice względem danej bazy definiuje się analogicznie.

Dla bazy \mathcal{B} niech

$$\underline{d}_{\mathcal{B}}(A, x) := \liminf_{I \in \mathcal{B}^x, I \rightarrow x} \frac{\lambda(A \cap I)}{\lambda(I)}$$

i

$$\overline{d}_{\mathcal{B}}(A, x) := \limsup_{I \in \mathcal{B}^x, I \rightarrow x} \frac{\lambda(A \cap I)}{\lambda(I)}.$$

Jeśli $\underline{d}_{\mathcal{B}}(A, x) = \overline{d}_{\mathcal{B}}(A, x)$, to wspólną wartość oznaczamy $d_{\mathcal{B}}(A, x)$.

Zatem $\underline{d}(A, x)$ i $\overline{d}(A, x)$ oznaczają, odpowiednio, $\underline{d}_{\mathcal{B}_o}(A, x)$ i $\overline{d}_{\mathcal{B}_o}(A, x)$, gdzie \mathcal{B}_o jest zwykłą bazą różniczkowania złożoną z przedziałów $I = (x - h, x + h)$, $h > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

M. Filipczak, T. Filipczak, G. H., W. Wilczyński

Remarks on exceptional points and differentiation bases Acta Math. Hungar.

Bazą różniczkowania \mathcal{B} nazywamy rodzinę $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}^x : x \in \mathbb{R}\}$, gdzie \mathcal{B}^x jest rodziną przedziałów zawierających x , o tej własności, że kres dolny ich długości jest równy 0.

Jeżeli F jest funkcją przedziału, to zapis $\lim_{I \in \mathcal{B}^x, I \rightarrow x} F(I) = g$ oznacza, że

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall I \in \mathcal{B}^x (\lambda(I) < \delta \Rightarrow |F(I) - g| < \varepsilon).$$

Górne i dolne granice względem danej bazy definiuje się analogicznie.

Dla bazy \mathcal{B} niech

$$\underline{d}_{\mathcal{B}}(A, x) := \liminf_{I \in \mathcal{B}^x, I \rightarrow x} \frac{\lambda(A \cap I)}{\lambda(I)}$$

i

$$\overline{d}_{\mathcal{B}}(A, x) := \limsup_{I \in \mathcal{B}^x, I \rightarrow x} \frac{\lambda(A \cap I)}{\lambda(I)}.$$

Jeśli $\underline{d}_{\mathcal{B}}(A, x) = \overline{d}_{\mathcal{B}}(A, x)$, to wspólną wartość oznaczamy $d_{\mathcal{B}}(A, x)$.

Zatem $\underline{d}(A, x)$ i $\overline{d}(A, x)$ oznaczają, odpowiednio, $\underline{d}_{\mathcal{B}_o}(A, x)$ i $\overline{d}_{\mathcal{B}_o}(A, x)$, gdzie \mathcal{B}_o jest zwykłą bazą różniczkowania złożoną z przedziałów $I = (x - h, x + h)$, $h > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

M. Filipczak, T. Filipczak, G. H., W. Wilczyński

Remarks on exceptional points and differentiation bases Acta Math. Hungar.

Bazą różniczkowania \mathcal{B} nazywamy rodzinę $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}^x : x \in \mathbb{R}\}$, gdzie \mathcal{B}^x jest rodziną przedziałów zawierających x , o tej własności, że kres dolny ich długości jest równy 0.

Jeżeli F jest funkcją przedziału, to zapis $\lim_{I \in \mathcal{B}^x, I \rightarrow x} F(I) = g$ oznacza, że

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall I \in \mathcal{B}^x (\lambda(I) < \delta \Rightarrow |F(I) - g| < \varepsilon).$$

Górne i dolne granice względem danej bazy definiuje się analogicznie.

Dla bazy \mathcal{B} niech

$$\underline{d}_{\mathcal{B}}(A, x) := \liminf_{I \in \mathcal{B}^x, I \rightarrow x} \frac{\lambda(A \cap I)}{\lambda(I)}$$

i

$$\overline{d}_{\mathcal{B}}(A, x) := \limsup_{I \in \mathcal{B}^x, I \rightarrow x} \frac{\lambda(A \cap I)}{\lambda(I)}.$$

Jeśli $\underline{d}_{\mathcal{B}}(A, x) = \overline{d}_{\mathcal{B}}(A, x)$, to wspólną wartość oznaczamy $d_{\mathcal{B}}(A, x)$.

Zatem $\underline{d}(A, x)$ i $\overline{d}(A, x)$ oznaczają, odpowiednio, $\underline{d}_{\mathcal{B}_o}(A, x)$ i $\overline{d}_{\mathcal{B}_o}(A, x)$, gdzie \mathcal{B}_o jest zwykłą bazą różniczkowania złożoną z przedziałów $I = (x - h, x + h)$, $h > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\delta \in [0, 1/2)$$

$$\mathcal{H}_B(\delta) : \quad \forall_{A \in \mathcal{L}^*} \exists_{x \in \mathbb{R}} \delta \leq \underline{d}_B(A, x) \leq \overline{d}_B(A, x) \leq 1 - \delta,$$

Punkty x o powyższej własności nazywamy punktami $\delta - B$ -wyjątkowymi dla A .

Cel: znalezienie

$$\delta_{\mathcal{H}_B} := \sup\{\delta \geq 0 : \mathcal{H}_B(\delta)\},$$

zwłaszcza dla baz równoważnych zwykłej bazie B_0 .

$$B_1 \approx B_2 \Leftrightarrow (d_{B_1}(A, x) = 1 \Leftrightarrow d_{B_2}(A, x) = 1 \text{ dla dowolnego } A \in \mathcal{L} \text{ i } x \in \mathbb{R}).$$

Oczywiście $\delta_{\mathcal{H}_{B_0}} = \delta_{\mathcal{H}}$.

$$\delta \in [0, 1/2)$$

$$\mathcal{H}_B(\delta) : \quad \forall_{A \in \mathcal{L}^*} \exists_{x \in \mathbb{R}} \delta \leq \underline{d}_B(A, x) \leq \overline{d}_B(A, x) \leq 1 - \delta,$$

Punkty x o powyższej własności nazywamy punktami $\delta - B$ -wyjątkowymi dla A .

Cel: znalezienie

$$\delta_{\mathcal{H}_B} := \sup\{\delta \geq 0 : \mathcal{H}_B(\delta)\},$$

zwłaszcza dla baz równoważnych zwykłej bazie B_o .

$$B_1 \approx B_2 \Leftrightarrow (d_{B_1}(A, x) = 1 \Leftrightarrow d_{B_2}(A, x) = 1 \text{ dla dowolnego } A \in \mathcal{L} \text{ i } x \in \mathbb{R}).$$

Oczywiście $\delta_{\mathcal{H}_{B_o}} = \delta_{\mathcal{H}}$.

$$\delta \in [0, 1/2)$$

$$\mathcal{H}_B(\delta) : \quad \forall_{A \in \mathcal{L}^*} \exists_{x \in \mathbb{R}} \delta \leq \underline{d}_B(A, x) \leq \overline{d}_B(A, x) \leq 1 - \delta,$$

Punkty x o powyższej własności nazywamy punktami $\delta - B$ -wyjątkowymi dla A .

Cel: znalezienie

$$\delta_{\mathcal{H}_B} := \sup\{\delta \geq 0 : \mathcal{H}_B(\delta)\},$$

zwłaszcza dla baz równoważnych zwykłej bazie B_0 .

$$B_1 \approx B_2 \Leftrightarrow (d_{B_1}(A, x) = 1 \Leftrightarrow d_{B_2}(A, x) = 1 \text{ dla dowolnego } A \in \mathcal{L} \text{ i } x \in \mathbb{R}).$$

Oczywiście $\delta_{\mathcal{H}_{B_0}} = \delta_{\mathcal{H}}$.

$$\delta \in [0, 1/2)$$

$$\mathcal{H}_B(\delta) : \quad \forall_{A \in \mathcal{L}^*} \exists_{x \in \mathbb{R}} \delta \leq \underline{d}_B(A, x) \leq \overline{d}_B(A, x) \leq 1 - \delta,$$

Punkty x o powyższej własności nazywamy punktami $\delta - B$ -wyjątkowymi dla A .

Cel: znalezienie

$$\delta_{\mathcal{H}_B} := \sup\{\delta \geq 0 : \mathcal{H}_B(\delta)\},$$

zwłaszcza dla baz równoważnych zwykłej bazie B_o .

$$B_1 \approx B_2 \Leftrightarrow (d_{B_1}(A, x) = 1 \Leftrightarrow d_{B_2}(A, x) = 1 \text{ dla dowolnego } A \in \mathcal{L} \text{ i } x \in \mathbb{R}).$$

Oczywiście $\delta_{\mathcal{H}_{B_o}} = \delta_{\mathcal{H}}$.

$$\delta \in [0, 1/2)$$

$$\mathcal{H}_B(\delta) : \quad \forall_{A \in \mathcal{L}^*} \exists_{x \in \mathbb{R}} \delta \leq \underline{d}_B(A, x) \leq \overline{d}_B(A, x) \leq 1 - \delta,$$

Punkty x o powyższej własności nazywamy punktami $\delta - B$ -wyjątkowymi dla A .

Cel: znalezienie

$$\delta_{\mathcal{H}_B} := \sup\{\delta \geq 0 : \mathcal{H}_B(\delta)\},$$

zwłaszcza dla baz równoważnych zwykłej bazie \mathcal{B}_o .

$$\mathcal{B}_1 \approx \mathcal{B}_2 \Leftrightarrow (d_{\mathcal{B}_1}(A, x) = 1 \Leftrightarrow d_{\mathcal{B}_2}(A, x) = 1 \text{ dla dowolnego } A \in \mathcal{L} \text{ i } x \in \mathbb{R}).$$

Oczywiście $\delta_{\mathcal{H}_{\mathcal{B}_o}} = \delta_{\mathcal{H}}$.

$$\delta \in [0, 1/2)$$

$$\mathcal{H}_B(\delta) : \quad \forall_{A \in \mathcal{L}^*} \exists_{x \in \mathbb{R}} \delta \leq \underline{d}_B(A, x) \leq \overline{d}_B(A, x) \leq 1 - \delta,$$

Punkty x o powyższej własności nazywamy punktami $\delta - B$ -wyjątkowymi dla A .

Cel: znalezienie

$$\delta_{\mathcal{H}_B} := \sup\{\delta \geq 0 : \mathcal{H}_B(\delta)\},$$

zwłaszcza dla baz równoważnych zwykłej bazie \mathcal{B}_o .

$$\mathcal{B}_1 \approx \mathcal{B}_2 \Leftrightarrow (d_{\mathcal{B}_1}(A, x) = 1 \Leftrightarrow d_{\mathcal{B}_2}(A, x) = 1 \text{ dla dowolnego } A \in \mathcal{L} \text{ i } x \in \mathbb{R}).$$

Oczywiście $\delta_{\mathcal{H}_{\mathcal{B}_o}} = \delta_{\mathcal{H}}$.

Łatwo można sprawdzić, że dla bazy różniczkowania $\hat{\mathcal{B}}$ złożonej z rodzin

$$\hat{\mathcal{B}}^x := \{(x - h, x + k) : h > 0, k > 0\},$$

dla $x \in \mathbb{R}$, zachodzi równoważność $\hat{\mathcal{B}} \approx \mathcal{B}_0$, ale $\delta_{\mathcal{H}_{\hat{\mathcal{B}}}} = 0$.

To pokazuje, że $\delta_{\mathcal{H}_{\hat{\mathcal{B}}}}$ nie jest cechą gęstości, ale rozważanej bazy różniczkowania.

Łatwo można sprawdzić, że dla bazy różniczkowania $\hat{\mathcal{B}}$ złożonej z rodzin

$$\hat{\mathcal{B}}^x := \{(x - h, x + k) : h > 0, k > 0\},$$

dla $x \in \mathbb{R}$, zachodzi równoważność $\hat{\mathcal{B}} \approx \mathcal{B}_0$, ale $\delta_{\mathcal{H}_{\hat{\mathcal{B}}}} = 0$.

To pokazuje, że $\delta_{\mathcal{H}_{\mathcal{B}}}$ nie jest cechą gęstości, ale rozważanej bazy różniczkowania.

Łatwo można sprawdzić, że dla bazy różniczkowania $\hat{\mathcal{B}}$ złożonej z rodzin

$$\hat{\mathcal{B}}^x := \{(x - h, x + k) : h > 0, k > 0\},$$

dla $x \in \mathbb{R}$, zachodzi równoważność $\hat{\mathcal{B}} \approx \mathcal{B}_0$, ale $\delta_{\mathcal{H}_{\hat{\mathcal{B}}}} = 0$.

To pokazuje, że $\delta_{\mathcal{H}_{\mathcal{B}}}$ nie jest cechą gęstości, ale rozważanej bazy różniczkowania.

Łatwo można sprawdzić, że dla bazy różniczkowania $\hat{\mathcal{B}}$ złożonej z rodzin

$$\hat{\mathcal{B}}^x := \{(x - h, x + k) : h > 0, k > 0\},$$

dla $x \in \mathbb{R}$, zachodzi równoważność $\hat{\mathcal{B}} \approx \mathcal{B}_0$, ale $\delta_{\mathcal{H}_{\hat{\mathcal{B}}}} = 0$.

To pokazuje, że $\delta_{\mathcal{H}_{\mathcal{B}}}$ nie jest cechą gęstości, ale rozważanej bazy różniczkowania.

Bazy asymetryczne

Dla $r > 0$ $\mathcal{B}_r := \{ \{(x - h, x + rh) : h > 0\} : x \in \mathbb{R} \}$.

$$\mathcal{B}_r \approx \mathcal{B}_o$$

Dla uproszczenia piszemy $\delta_{\mathcal{H}_r}$ zamiast $\delta_{\mathcal{H}_{\mathcal{B}_r}}$.

Fakt

Dla dowolnego $r \geq 1$: $\frac{r}{(r+1)^2} \leq \delta_{\mathcal{H}_r} \leq \frac{1}{r+1}$.

(1) Dla $r = 1$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_o$. W tym przypadku dostajemy znaną już nierówność:

$$\frac{1}{4} \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{2}$$

(2) Ponieważ $\lim_{r \rightarrow +\infty} \delta_{\mathcal{H}_r} = 0$, możemy otrzymać nieskończoną ilość wartości $\delta_{\mathcal{H}_r}$. Zatem hipoteza, że $\delta_{\mathcal{H}_{r_1}} \neq \delta_{\mathcal{H}_{r_2}}$ dla $r_1 \neq r_2$, a nawet, że funkcja $r \rightarrow \delta_{\mathcal{H}_r}$ jest ciągła i malejąca, wydaje się uprawniona.

(3) Rozważając bazę różniczkowania $\mathcal{B}'_r := \{ \{(x - rh, x + r) : h > 0\} : x \in \mathbb{R} \}$ otrzymujemy $\delta_{\mathcal{H}'_r} = \delta_{\mathcal{H}_r}$.

Bazy asymetryczne

Dla $r > 0$ $\mathcal{B}_r := \{ \{(x - h, x + rh) : h > 0\} : x \in \mathbb{R} \}$.

$$\mathcal{B}_r \approx \mathcal{B}_0$$

Dla uproszczenia piszemy $\delta_{\mathcal{H}_r}$ zamiast $\delta_{\mathcal{H}_{\mathcal{B}_r}}$.

Fakt

Dla dowolnego $r \geq 1$: $\frac{r}{(r+1)^2} \leq \delta_{\mathcal{H}_r} \leq \frac{1}{r+1}$.

(1) Dla $r = 1$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_0$. W tym przypadku dostajemy znaną już nierówność:

$$\frac{1}{4} \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{2}$$

(2) Ponieważ $\lim_{r \rightarrow +\infty} \delta_{\mathcal{H}_r} = 0$, możemy otrzymać nieskończoną ilość wartości $\delta_{\mathcal{H}_r}$. Zatem hipoteza, że $\delta_{\mathcal{H}_{r_1}} \neq \delta_{\mathcal{H}_{r_2}}$ dla $r_1 \neq r_2$, a nawet, że funkcja $r \rightarrow \delta_{\mathcal{H}_r}$ jest ciągła i malejąca, wydaje się uprawniona.

(3) Rozważając bazę różniczkowania $\mathcal{B}'_r := \{ \{(x - rh, x + r) : h > 0\} : x \in \mathbb{R} \}$ otrzymujemy $\delta_{\mathcal{H}'_r} = \delta_{\mathcal{H}_r}$.

Bazy asymetryczne

Dla $r > 0$ $\mathcal{B}_r := \{ \{(x - h, x + rh) : h > 0\} : x \in \mathbb{R} \}$.

$$\mathcal{B}_r \approx \mathcal{B}_0$$

Dla uproszczenia piszemy $\delta_{\mathcal{H}_r}$ zamiast $\delta_{\mathcal{H}_{\mathcal{B}_r}}$.

Fakt

Dla dowolnego $r \geq 1$: $\frac{r}{(r+1)^2} \leq \delta_{\mathcal{H}_r} \leq \frac{1}{r+1}$.

(1) Dla $r = 1$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_0$. W tym przypadku dostajemy znaną już nierówność:

$$\frac{1}{4} \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{2}$$

(2) Ponieważ $\lim_{r \rightarrow +\infty} \delta_{\mathcal{H}_r} = 0$, możemy otrzymać nieskończoną ilość wartości $\delta_{\mathcal{H}_r}$. Zatem hipoteza, że $\delta_{\mathcal{H}_{r_1}} \neq \delta_{\mathcal{H}_{r_2}}$ dla $r_1 \neq r_2$, a nawet, że funkcja $r \rightarrow \delta_{\mathcal{H}_r}$ jest ciągła i malejąca, wydaje się uprawniona.

(3) Rozważając bazę różniczkowania $\mathcal{B}'_r := \{ \{(x - rh, x + r) : h > 0\} : x \in \mathbb{R} \}$ otrzymujemy $\delta_{\mathcal{H}'_r} = \delta_{\mathcal{H}_r}$.

Bazy asymetryczne

Dla $r > 0$ $\mathcal{B}_r := \{ \{(x - h, x + rh) : h > 0\} : x \in \mathbb{R} \}$.

$$\mathcal{B}_r \approx \mathcal{B}_0$$

Dla uproszczenia piszemy $\delta_{\mathcal{H}_r}$ zamiast $\delta_{\mathcal{H}_{\mathcal{B}_r}}$.

Fakt

Dla dowolnego $r \geq 1$: $\frac{r}{(r+1)^2} \leq \delta_{\mathcal{H}_r} \leq \frac{1}{r+1}$.

(1) Dla $r = 1$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_0$. W tym przypadku dostajemy znaną już nierówność:

$$\frac{1}{4} \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{2}$$

(2) Ponieważ $\lim_{r \rightarrow +\infty} \delta_{\mathcal{H}_r} = 0$, możemy otrzymać nieskończoną ilość wartości $\delta_{\mathcal{H}_r}$. Zatem hipoteza, że $\delta_{\mathcal{H}_{r_1}} \neq \delta_{\mathcal{H}_{r_2}}$ dla $r_1 \neq r_2$, a nawet, że funkcja $r \rightarrow \delta_{\mathcal{H}_r}$ jest ciągła i malejąca, wydaje się uprawniona.

(3) Rozważając bazę różniczkowania $\mathcal{B}'_r := \{ \{(x - rh, x + r) : h > 0\} : x \in \mathbb{R} \}$ otrzymujemy $\delta_{\mathcal{H}'_r} = \delta_{\mathcal{H}_r}$.

Bazy asymetryczne

Dla $r > 0$ $\mathcal{B}_r := \{ \{(x - h, x + rh) : h > 0\} : x \in \mathbb{R} \}$.

$$\mathcal{B}_r \approx \mathcal{B}_0$$

Dla uproszczenia piszemy $\delta_{\mathcal{H}_r}$ zamiast $\delta_{\mathcal{H}_{\mathcal{B}_r}}$.

Fakt

Dla dowolnego $r \geq 1$: $\frac{r}{(r+1)^2} \leq \delta_{\mathcal{H}_r} \leq \frac{1}{r+1}$.

(1) Dla $r = 1$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_0$. W tym przypadku dostajemy znaną już nierówność:

$$\frac{1}{4} \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{2}$$

(2) Ponieważ $\lim_{r \rightarrow +\infty} \delta_{\mathcal{H}_r} = 0$, możemy otrzymać nieskończoną ilość wartości $\delta_{\mathcal{H}_r}$. Zatem hipoteza, że $\delta_{\mathcal{H}_{r_1}} \neq \delta_{\mathcal{H}_{r_2}}$ dla $r_1 \neq r_2$, a nawet, że funkcja $r \rightarrow \delta_{\mathcal{H}_r}$ jest ciągła i malejąca, wydaje się uprawniona.

(3) Rozważając bazę różniczkowania $\mathcal{B}'_r := \{ \{(x - rh, x + r) : h > 0\} : x \in \mathbb{R} \}$ otrzymujemy $\delta_{\mathcal{H}'_r} = \delta_{\mathcal{H}_r}$.

Bazy asymetryczne

Dla $r > 0$ $\mathcal{B}_r := \{ \{(x - h, x + rh) : h > 0\} : x \in \mathbb{R} \}$.

$$\mathcal{B}_r \approx \mathcal{B}_0$$

Dla uproszczenia piszemy $\delta_{\mathcal{H}_r}$ zamiast $\delta_{\mathcal{H}_{\mathcal{B}_r}}$.

Fakt

Dla dowolnego $r \geq 1$: $\frac{r}{(r+1)^2} \leq \delta_{\mathcal{H}_r} \leq \frac{1}{r+1}$.

(1) Dla $r = 1$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_0$. W tym przypadku dostajemy znaną już nierówność:

$$\frac{1}{4} \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{2}$$

(2) Ponieważ $\lim_{r \rightarrow +\infty} \delta_{\mathcal{H}_r} = 0$, możemy otrzymać nieskończoną ilość wartości $\delta_{\mathcal{H}_r}$. Zatem hipoteza, że $\delta_{\mathcal{H}_{r_1}} \neq \delta_{\mathcal{H}_{r_2}}$ dla $r_1 \neq r_2$, a nawet, że funkcja $r \rightarrow \delta_{\mathcal{H}_r}$ jest ciągła i malejąca, wydaje się uprawniona.

(3) Rozważając bazę różniczkowania $\mathcal{B}'_r := \{ \{(x - rh, x + r) : h > 0\} : x \in \mathbb{R} \}$ otrzymujemy $\delta_{\mathcal{H}'_r} = \delta_{\mathcal{H}_r}$.

Bazy asymetryczne

Dla $r > 0$ $\mathcal{B}_r := \{ \{(x - h, x + rh) : h > 0\} : x \in \mathbb{R} \}$.

$$\mathcal{B}_r \approx \mathcal{B}_0$$

Dla uproszczenia piszemy $\delta_{\mathcal{H}_r}$ zamiast $\delta_{\mathcal{H}_{\mathcal{B}_r}}$.

Fakt

Dla dowolnego $r \geq 1$: $\frac{r}{(r+1)^2} \leq \delta_{\mathcal{H}_r} \leq \frac{1}{r+1}$.

(1) Dla $r = 1$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_0$. W tym przypadku dostajemy znaną już nierówność:

$$\frac{1}{4} \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{2}$$

(2) Ponieważ $\lim_{r \rightarrow +\infty} \delta_{\mathcal{H}_r} = 0$, możemy otrzymać nieskończoną ilość wartości $\delta_{\mathcal{H}_r}$. Zatem hipoteza, że $\delta_{\mathcal{H}_{r_1}} \neq \delta_{\mathcal{H}_{r_2}}$ dla $r_1 \neq r_2$, a nawet, że funkcja $r \rightarrow \delta_{\mathcal{H}_r}$ jest ciągła i malejąca, wydaje się uprawniona.

(3) Rozważając bazę różniczkowania $\mathcal{B}'_r := \{ \{(x - rh, x + r) : h > 0\} : x \in \mathbb{R} \}$ otrzymujemy $\delta_{\mathcal{H}'_r} = \delta_{\mathcal{H}_r}$.

Bazy asymetryczne

(4) Dla bazy różniczkowania

$$\mathcal{B}_r'' := \{ \{(x - rh, x + h) : h > 0\} \cup \{(x - h, x + rh) : h > 0\} : x \in \mathbb{R} \},$$

gdzie $r \geq 1$, mamy

$$\frac{1}{2(r+1)} \leq \delta_{\mathcal{H}_r''} \leq \frac{1}{r+1}.$$

(5) Bazy \mathcal{B}_r , \mathcal{B}_r' i \mathcal{B}_r'' mogą być również rozważane dla $0 < r < 1$. Zastępując r przez $\frac{1}{r}$, otrzymujemy

$$\frac{r}{(r+1)^2} \leq \delta_{\mathcal{H}_r} = \delta_{\mathcal{H}_r'} \leq \frac{r}{r+1} \quad \text{and} \quad \frac{r}{2(r+1)} \leq \delta_{\mathcal{H}_r''} \leq \frac{r}{r+1}.$$

Ostatnie wzory pozostają prawdziwe dla $r = 0$.

Bazy asymetryczne

(4) Dla bazy różniczkowania

$$\mathcal{B}_r'' := \{ \{(x - rh, x + h) : h > 0\} \cup \{(x - h, x + rh) : h > 0\} : x \in \mathbb{R} \},$$

gdzie $r \geq 1$, mamy

$$\frac{1}{2(r+1)} \leq \delta_{\mathcal{H}_r''} \leq \frac{1}{r+1}.$$

(5) Bazy \mathcal{B}_r , \mathcal{B}_r' i \mathcal{B}_r'' mogą być również rozważane dla $0 < r < 1$. Zastępując r przez $\frac{1}{r}$, otrzymujemy

$$\frac{r}{(r+1)^2} \leq \delta_{\mathcal{H}_r} = \delta_{\mathcal{H}_r'} \leq \frac{r}{r+1} \quad \text{and} \quad \frac{r}{2(r+1)} \leq \delta_{\mathcal{H}_r''} \leq \frac{r}{r+1}.$$

Ostatnie wzory pozostają prawdziwe dla $r = 0$.

Bazy asymetryczne

(4) Dla bazy różniczkowania

$$\mathcal{B}_r'' := \{ \{(x - rh, x + h) : h > 0\} \cup \{(x - h, x + rh) : h > 0\} : x \in \mathbb{R} \},$$

gdzie $r \geq 1$, mamy

$$\frac{1}{2(r+1)} \leq \delta_{\mathcal{H}_r''} \leq \frac{1}{r+1}.$$

(5) Bazy \mathcal{B}_r , \mathcal{B}_r' i \mathcal{B}_r'' mogą być również rozważane dla $0 < r < 1$. Zastępując r przez $\frac{1}{r}$, otrzymujemy

$$\frac{r}{(r+1)^2} \leq \delta_{\mathcal{H}_r} = \delta_{\mathcal{H}_r'} \leq \frac{r}{r+1} \quad \text{and} \quad \frac{r}{2(r+1)} \leq \delta_{\mathcal{H}_r''} \leq \frac{r}{r+1}.$$

Ostatnie wzory pozostają prawdziwe dla $r = 0$.

Bazy symetryczne

M.Filipczak, J.Hejduk, *On topologies associated with the Lebesgue Measure*,M.Filipczak, T.Filipczak, J.Hejduk, *On the Comparison of the Density Type Topologies*,

Niech \mathcal{S} oznacza rodzinę wszystkich niemalejących, zbieżnych do zera ciągów liczb rzeczywistych dodatnich. Ciąg $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ oznaczamy przez $\langle s \rangle$.

$$\mathcal{S}_0 := \left\{ \langle s \rangle \in \mathcal{S} : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 0 \right\}$$

$$\mathcal{S}_+ := \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_0 = \left\{ \langle s \rangle \in \mathcal{S} : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} > 0 \right\}.$$

$$\mathcal{B}_{\langle s \rangle} := \{ \{(x - s_n, x + s_n) : n \in \mathbb{N}\} : x \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathcal{B}_{\langle s \rangle} \approx \mathcal{B}_0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \langle s \rangle \in \mathcal{S}_+.$$

Bazy symetryczne

M.Filipczak, J.Hejduk, *On topologies associated with the Lebesgue Measure*,M.Filipczak, T.Filipczak, J.Hejduk, *On the Comparison of the Density Type Topologies*,

Niech \mathcal{S} oznacza rodzinę wszystkich niemalejących, zbieżnych do zera ciągów liczb rzeczywistych dodatnich. Ciąg $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ oznaczamy przez $\langle s \rangle$.

$$\mathcal{S}_0 := \left\{ \langle s \rangle \in \mathcal{S} : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 0 \right\}$$

$$\mathcal{S}_+ := \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_0 = \left\{ \langle s \rangle \in \mathcal{S} : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} > 0 \right\}.$$

$$\mathcal{B}_{\langle s \rangle} := \{ \{(x - s_n, x + s_n) : n \in \mathbb{N}\} : x \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathcal{B}_{\langle s \rangle} \approx \mathcal{B}_0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \langle s \rangle \in \mathcal{S}_+.$$

Bazy symetryczne

M.Filipczak, J.Hejduk, *On topologies associated with the Lebesgue Measure*,M.Filipczak, T.Filipczak, J.Hejduk, *On the Comparison of the Density Type Topologies*,

Niech \mathcal{S} oznacza rodzinę wszystkich niemalejących, zbieżnych do zera ciągów liczb rzeczywistych dodatnich. Ciąg $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ oznaczamy przez $\langle s \rangle$.

$$\mathcal{S}_0 := \left\{ \langle s \rangle \in \mathcal{S} : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 0 \right\}$$

$$\mathcal{S}_+ := \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_0 = \left\{ \langle s \rangle \in \mathcal{S} : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} > 0 \right\}.$$

$$\mathcal{B}_{\langle s \rangle} := \{ \{(x - s_n, x + s_n) : n \in \mathbb{N}\} : x \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathcal{B}_{\langle s \rangle} \approx \mathcal{B}_0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \langle s \rangle \in \mathcal{S}_+.$$

Bazy symetryczne

M.Filipczak, J.Hejduk, *On topologies associated with the Lebesgue Measure*,M.Filipczak, T.Filipczak, J.Hejduk, *On the Comparison of the Density Type Topologies*,

Niech \mathcal{S} oznacza rodzinę wszystkich niemalejących, zbieżnych do zera ciągów liczb rzeczywistych dodatnich. Ciąg $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ oznaczamy przez $\langle s \rangle$.

$$\mathcal{S}_0 := \left\{ \langle s \rangle \in \mathcal{S} : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 0 \right\}$$

$$\mathcal{S}_+ := \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_0 = \left\{ \langle s \rangle \in \mathcal{S} : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} > 0 \right\}.$$

$$\mathcal{B}_{\langle s \rangle} := \{ \{(x - s_n, x + s_n) : n \in \mathbb{N}\} : x \in \mathbb{R} \}$$

$\mathcal{B}_{\langle s \rangle} \approx \mathcal{B}_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle s \rangle \in \mathcal{S}_+$.

Bazy symetryczne

M.Filipczak, J.Hejduk, *On topologies associated with the Lebesgue Measure*,M.Filipczak, T.Filipczak, J.Hejduk, *On the Comparison of the Density Type Topologies*,

Niech \mathcal{S} oznacza rodzinę wszystkich niemalejących, zbieżnych do zera ciągów liczb rzeczywistych dodatnich. Ciąg $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ oznaczamy przez $\langle s \rangle$.

$$\mathcal{S}_0 := \left\{ \langle s \rangle \in \mathcal{S} : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 0 \right\}$$

$$\mathcal{S}_+ := \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_0 = \left\{ \langle s \rangle \in \mathcal{S} : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} > 0 \right\}.$$

$$\mathcal{B}_{\langle s \rangle} := \{ \{(x - s_n, x + s_n) : n \in \mathbb{N}\} : x \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathcal{B}_{\langle s \rangle} \approx \mathcal{B}_o \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \langle s \rangle \in \mathcal{S}_+.$$

Kombinatoryczne przeformułowanie problemu dla $\mathcal{B}_{\langle s \rangle}$

$\mathcal{K}(\delta)$: dla dowolnej konfiguracji C , istnieje wierzchołek $v \in v(C)$ taki, że

$$\delta \leq \frac{\lambda(C \cap (v - \omega, v + \omega))}{2\omega} \leq 1 - \delta \quad \text{for all } \omega > 0.$$

Stwierdzenie równoważne:

$\mathcal{K}^*(\delta)$: istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że dla dowolnej konfiguracji $C \subset (-\infty, \varepsilon)$ istnieje wierzchołek $v \in v(C)$, dla którego

$$\delta \leq \frac{\lambda(C \cap (v - \omega, v + \omega))}{2\omega} \leq 1 - \delta \quad \text{przy dowolnym } \omega > 0.$$

Dla ustalonego ciągu $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$ i danej $\delta \in [0, 1/2]$:

$\mathcal{K}_{\langle s \rangle}(\delta)$: istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że dla dowolnej konfiguracji $C \subset (-\infty, \varepsilon)$ istnieje wierzchołek $v \in v(C)$, dla którego

$$\delta \leq \frac{\lambda(C \cap (v - s_n, v + s_n))}{2s_n} \leq 1 - \delta \quad \text{przy dowolnym } n \in \mathbb{N}.$$

$$\delta_{\mathcal{K}_{\langle s \rangle}} := \sup\{\delta > 0 : \mathcal{K}_{\langle s \rangle}(\delta)\}$$

Oczywiście

$$\mathcal{K}(\delta) \Rightarrow \mathcal{K}_{\langle s \rangle}(\delta), \quad \text{so} \quad \delta_{\mathcal{K}_{\langle s \rangle}} \geq \delta_{\mathcal{K}}$$

Kombinatoryczne przeformułowanie problemu dla $\mathcal{B}_{\langle s \rangle}$

$\mathcal{K}(\delta)$: dla dowolnej konfiguracji C , istnieje wierzchołek $v \in v(C)$ taki, że

$$\delta \leq \frac{\lambda(C \cap (v - \omega, v + \omega))}{2\omega} \leq 1 - \delta \quad \text{for all } \omega > 0.$$

Stwierdzenie równoważne:

$\mathcal{K}^*(\delta)$: istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że dla dowolnej konfiguracji $C \subset (-\infty, \varepsilon)$ istnieje wierzchołek $v \in v(C)$, dla którego

$$\delta \leq \frac{\lambda(C \cap (v - \omega, v + \omega))}{2\omega} \leq 1 - \delta \quad \text{przy dowolnym } \omega > 0.$$

Dla ustalonego ciągu $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$ i danej $\delta \in [0, 1/2]$:

$\mathcal{K}_{\langle s \rangle}(\delta)$: istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że dla dowolnej konfiguracji $C \subset (-\infty, \varepsilon)$ istnieje wierzchołek $v \in v(C)$, dla którego

$$\delta \leq \frac{\lambda(C \cap (v - s_n, v + s_n))}{2s_n} \leq 1 - \delta \quad \text{przy dowolnym } n \in \mathbb{N}.$$

$$\delta_{\mathcal{K}_{\langle s \rangle}} := \sup\{\delta > 0 : \mathcal{K}_{\langle s \rangle}(\delta)\}$$

Oczywiście

$$\mathcal{K}(\delta) \Rightarrow \mathcal{K}_{\langle s \rangle}(\delta), \quad \text{so} \quad \delta_{\mathcal{K}_{\langle s \rangle}} \geq \delta_{\mathcal{K}}$$

Kombinatoryczne przeformułowanie problemu dla $\mathcal{B}_{\langle s \rangle}$

$\mathcal{K}(\delta)$: dla dowolnej konfiguracji C , istnieje wierzchołek $v \in v(C)$ taki, że

$$\delta \leq \frac{\lambda(C \cap (v - \omega, v + \omega))}{2\omega} \leq 1 - \delta \quad \text{for all } \omega > 0.$$

Stwierdzenie równoważne:

$\mathcal{K}^*(\delta)$: istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że dla dowolnej konfiguracji $C \subset (-\infty, \varepsilon)$ istnieje wierzchołek $v \in v(C)$, dla którego

$$\delta \leq \frac{\lambda(C \cap (v - \omega, v + \omega))}{2\omega} \leq 1 - \delta \quad \text{przy dowolnym } \omega > 0.$$

Dla ustalonego ciągu $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$ i danej $\delta \in [0, 1/2]$:

$\mathcal{K}_{\langle s \rangle}(\delta)$: istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że dla dowolnej konfiguracji $C \subset (-\infty, \varepsilon)$ istnieje wierzchołek $v \in v(C)$, dla którego

$$\delta \leq \frac{\lambda(C \cap (v - s_n, v + s_n))}{2s_n} \leq 1 - \delta \quad \text{przy dowolnym } n \in \mathbb{N}.$$

$$\delta_{\mathcal{K}_{\langle s \rangle}} := \sup\{\delta > 0 : \mathcal{K}_{\langle s \rangle}(\delta)\}$$

Oczywiście

$$\mathcal{K}(\delta) \Rightarrow \mathcal{K}_{\langle s \rangle}(\delta), \quad \text{so} \quad \delta_{\mathcal{K}_{\langle s \rangle}} \geq \delta_{\mathcal{K}}$$

Kombinatoryczne przeformułowanie problemu dla $\mathcal{B}_{\langle s \rangle}$

$\mathcal{K}(\delta)$: dla dowolnej konfiguracji C , istnieje wierzchołek $v \in v(C)$ taki, że

$$\delta \leq \frac{\lambda(C \cap (v - \omega, v + \omega))}{2\omega} \leq 1 - \delta \quad \text{for all } \omega > 0.$$

Stwierdzenie równoważne:

$\mathcal{K}^*(\delta)$: istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że dla dowolnej konfiguracji $C \subset (-\infty, \varepsilon)$ istnieje wierzchołek $v \in v(C)$, dla którego

$$\delta \leq \frac{\lambda(C \cap (v - \omega, v + \omega))}{2\omega} \leq 1 - \delta \quad \text{przy dowolnym } \omega > 0.$$

Dla ustalonego ciągu $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$ i danej $\delta \in [0, 1/2]$:

$\mathcal{K}_{\langle s \rangle}(\delta)$: istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że dla dowolnej konfiguracji $C \subset (-\infty, \varepsilon)$ istnieje wierzchołek $v \in v(C)$, dla którego

$$\delta \leq \frac{\lambda(C \cap (v - s_n, v + s_n))}{2s_n} \leq 1 - \delta \quad \text{przy dowolnym } n \in \mathbb{N}.$$

$$\delta_{\mathcal{K}_{\langle s \rangle}} := \sup\{\delta > 0 : \mathcal{K}_{\langle s \rangle}(\delta)\}$$

Oczywiście

$$\mathcal{K}(\delta) \Rightarrow \mathcal{K}_{\langle s \rangle}(\delta), \quad \text{so} \quad \delta_{\mathcal{K}_{\langle s \rangle}} \geq \delta_{\mathcal{K}}$$

Kombinatoryczne przeformułowanie problemu dla $\mathcal{B}_{\langle s \rangle}$

$\mathcal{K}(\delta)$: dla dowolnej konfiguracji C , istnieje wierzchołek $v \in v(C)$ taki, że

$$\delta \leq \frac{\lambda(C \cap (v - \omega, v + \omega))}{2\omega} \leq 1 - \delta \quad \text{for all } \omega > 0.$$

Stwierdzenie równoważne:

$\mathcal{K}^*(\delta)$: istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że dla dowolnej konfiguracji $C \subset (-\infty, \varepsilon)$ istnieje wierzchołek $v \in v(C)$, dla którego

$$\delta \leq \frac{\lambda(C \cap (v - \omega, v + \omega))}{2\omega} \leq 1 - \delta \quad \text{przy dowolnym } \omega > 0.$$

Dla ustalonego ciągu $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$ i danej $\delta \in [0, 1/2]$:

$\mathcal{K}_{\langle s \rangle}(\delta)$: istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że dla dowolnej konfiguracji $C \subset (-\infty, \varepsilon)$ istnieje wierzchołek $v \in v(C)$, dla którego

$$\delta \leq \frac{\lambda(C \cap (v - s_n, v + s_n))}{2s_n} \leq 1 - \delta \quad \text{przy dowolnym } n \in \mathbb{N}.$$

$$\delta_{\mathcal{K}_{\langle s \rangle}} := \sup\{\delta > 0 : \mathcal{K}_{\langle s \rangle}(\delta)\}$$

Oczywiście

$$\mathcal{K}(\delta) \Rightarrow \mathcal{K}_{\langle s \rangle}(\delta), \quad \text{so} \quad \delta_{\mathcal{K}_{\langle s \rangle}} \geq \delta_{\mathcal{K}}.$$

Kombinatoryczne przeformułowanie problemu dla $\mathcal{B}_{\langle s \rangle}$

Twierdzenie

Dla dowolnego $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$ mamy

$$\delta_{\mathcal{K}_{\langle s \rangle}} = \delta_{\mathcal{H}_{\langle s \rangle}}.$$

Dla uproszczenia - tę wspólną wartość oznaczamy $\delta_{\langle s \rangle}$.

Kombinatoryczne przeformułowanie problemu dla $\mathcal{B}_{\langle s \rangle}$

Twierdzenie

Dla dowolnego $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$ mamy

$$\delta_{\mathcal{K}_{\langle s \rangle}} = \delta_{\mathcal{H}_{\langle s \rangle}}.$$

Dla uproszczenia - tę wspólną wartość oznaczamy $\delta_{\langle s \rangle}$.

Fakt

Dla dowolnego ciągu $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$ takiego, że $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$, mamy $\delta_{\langle s \rangle} = \delta_{\mathcal{H}}$.

Można łatwo zauważyć, że jeśli $\langle s \rangle, \langle t \rangle \in \mathcal{S}$ i $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = 1$, to gęstości definiowane przez $\langle s \rangle$ i $\langle t \rangle$ są identyczne i w konsekwencji $\delta_{\langle s \rangle} = \delta_{\langle t \rangle}$.

Jednakże można znaleźć ciągi $\langle s \rangle, \langle t \rangle \in \mathcal{S}_+$ takie, że $d_{\mathcal{B}_{\langle s \rangle}}(A, 0) \neq d_{\mathcal{B}_{\langle t \rangle}}(A, 0)$ dla pewnego zbioru $A \in \mathcal{L}$, a $\delta_{\langle s \rangle} = \delta_{\langle t \rangle}$.

Fakt

Dla dowolnego ciągu $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$ takiego, że $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$, mamy $\delta_{\langle s \rangle} = \delta_{\mathcal{H}}$.

Można łatwo zauważyć, że jeśli $\langle s \rangle, \langle t \rangle \in \mathcal{S}$ i

$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = 1$, to gęstości definiowane przez $\langle s \rangle$ i $\langle t \rangle$ są identyczne i w konsekwencji $\delta_{\langle s \rangle} = \delta_{\langle t \rangle}$.

Jednakże można znaleźć ciągi $\langle s \rangle, \langle t \rangle \in \mathcal{S}_+$ takie, że $d_{B_{\langle s \rangle}}(A, 0) \neq d_{B_{\langle t \rangle}}(A, 0)$ dla pewnego zbioru $A \in \mathcal{L}$, a $\delta_{\langle s \rangle} = \delta_{\langle t \rangle}$.

Fakt

Dla dowolnego ciągu $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$ takiego, że $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$, mamy $\delta_{\langle s \rangle} = \delta_{\mathcal{H}}$.

Można łatwo zauważyć, że jeśli $\langle s \rangle, \langle t \rangle \in \mathcal{S}$ i $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = 1$, to gęstości definiowane przez $\langle s \rangle$ i $\langle t \rangle$ są identyczne i w konsekwencji $\delta_{\langle s \rangle} = \delta_{\langle t \rangle}$.

Jednakże można znaleźć ciągi $\langle s \rangle, \langle t \rangle \in \mathcal{S}_+$ takie, że $d_{\mathcal{B}_{\langle s \rangle}}(A, 0) \neq d_{\mathcal{B}_{\langle t \rangle}}(A, 0)$ dla pewnego zbioru $A \in \mathcal{L}$, a $\delta_{\langle s \rangle} = \delta_{\langle t \rangle}$.

Fakt

Dla dowolnego ciągu $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$ takiego, że $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$, mamy $\delta_{\langle s \rangle} = \delta_{\mathcal{H}}$.

Można łatwo zauważyć, że jeśli $\langle s \rangle, \langle t \rangle \in \mathcal{S}$ i $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = 1$, to gęstości definiowane przez $\langle s \rangle$ i $\langle t \rangle$ są identyczne i w konsekwencji $\delta_{\langle s \rangle} = \delta_{\langle t \rangle}$.

Jednakże można znaleźć ciągi $\langle s \rangle, \langle t \rangle \in \mathcal{S}_+$ takie, że $d_{\mathcal{B}_{\langle s \rangle}}(A, 0) \neq d_{\mathcal{B}_{\langle t \rangle}}(A, 0)$ dla pewnego zbioru $A \in \mathcal{L}$, a $\delta_{\langle s \rangle} = \delta_{\langle t \rangle}$.

Fakt

Dla dowolnego ciągu $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$ takiego, że $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$, mamy $\delta_{\langle s \rangle} = \delta_{\mathcal{H}}$.

Można łatwo zauważyć, że jeśli $\langle s \rangle, \langle t \rangle \in \mathcal{S}$ i $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = 1$, to gęstości definiowane przez $\langle s \rangle$ i $\langle t \rangle$ są identyczne i w konsekwencji $\delta_{\langle s \rangle} = \delta_{\langle t \rangle}$.

Jednakże można znaleźć ciągi $\langle s \rangle, \langle t \rangle \in \mathcal{S}_+$ takie, że $d_{\mathcal{B}_{\langle s \rangle}}(A, 0) \neq d_{\mathcal{B}_{\langle t \rangle}}(A, 0)$ dla pewnego zbioru $A \in \mathcal{L}$, a $\delta_{\langle s \rangle} = \delta_{\langle t \rangle}$.

Fakt

Dla dowolnego ciągu $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$ takiego, że $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$, mamy $\delta_{\langle s \rangle} = \delta_{\mathcal{H}}$.

Można łatwo zauważyć, że jeśli $\langle s \rangle, \langle t \rangle \in \mathcal{S}$ i $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = 1$, to gęstości definiowane przez $\langle s \rangle$ i $\langle t \rangle$ są identyczne i w konsekwencji $\delta_{\langle s \rangle} = \delta_{\langle t \rangle}$.

Jednakże można znaleźć ciągi $\langle s \rangle, \langle t \rangle \in \mathcal{S}_+$ takie, że $d_{\mathcal{B}_{\langle s \rangle}}(A, 0) \neq d_{\mathcal{B}_{\langle t \rangle}}(A, 0)$ dla pewnego zbioru $A \in \mathcal{L}$, a $\delta_{\langle s \rangle} = \delta_{\langle t \rangle}$.

Fakt

Niech $\delta \in (0, 1/2)$, $A \in \mathcal{L}^*$, $p \in \mathbb{R}$ i niech $\langle s \rangle, \langle t \rangle \in \mathcal{S}$ spełniają warunek $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_n}{t_n} = 1$. Wtedy p jest $\delta\text{-}\mathcal{B}_{\langle t \rangle}$ wyjątkowym punktem zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy p jest $\delta\text{-}\mathcal{B}_{\langle s \rangle}$ wyjątkowym punktem A .

Wniosek

Jeśli $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_n}{t_n} = 1$, to

$$\delta_{\langle t \rangle} = \delta_{\langle s \rangle}.$$

Fakt

Jeśli $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$ i $\alpha > 0$, to

$$\delta_{\langle s \rangle} = \delta_{\langle \alpha s \rangle}.$$

Fakt

Niech $\delta \in (0, 1/2)$, $A \in \mathcal{L}^*$, $p \in \mathbb{R}$ i niech $\langle s \rangle, \langle t \rangle \in \mathcal{S}$ spełniają warunek $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_n}{t_n} = 1$. Wtedy p jest δ - $\mathcal{B}_{\langle t \rangle}$ wyjątkowym punktem zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy p jest δ - $\mathcal{B}_{\langle s \rangle}$ wyjątkowym punktem A .

Wniosek

Jeśli $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_n}{t_n} = 1$, to

$$\delta_{\langle t \rangle} = \delta_{\langle s \rangle}.$$

Fakt

Jeśli $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$ i $\alpha > 0$, to

$$\delta_{\langle s \rangle} = \delta_{\langle \alpha s \rangle}.$$

Fakt

Niech $\delta \in (0, 1/2)$, $A \in \mathcal{L}^*$, $p \in \mathbb{R}$ i niech $\langle s \rangle, \langle t \rangle \in \mathcal{S}$ spełniają warunek $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_n}{t_n} = 1$. Wtedy p jest δ - $\mathcal{B}_{\langle t \rangle}$ wyjątkowym punktem zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy p jest δ - $\mathcal{B}_{\langle s \rangle}$ wyjątkowym punktem A .

Wniosek

Jeśli $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_n}{t_n} = 1$, to

$$\delta_{\langle t \rangle} = \delta_{\langle s \rangle}.$$

Fakt

Jeśli $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$ i $\alpha > 0$, to

$$\delta_{\langle s \rangle} = \delta_{\langle \alpha s \rangle}.$$

T. Filipczak

Dla dowolnego $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$

$$\delta_{\langle s \rangle} \leq \frac{\sqrt{17} - 3}{4} \approx 0,28078$$

$$\delta_{\langle s \rangle} \leq \frac{33 - \sqrt{577}}{32} \approx 0,2806$$

T. Filipczak

Dla dowolnego $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$

$$\delta_{\langle s \rangle} \leq \frac{\sqrt{17} - 3}{4} \approx 0,28078$$

$$\delta_{\langle s \rangle} \leq \frac{33 - \sqrt{577}}{32} \approx 0,2806$$

T. Filipczak

Dla dowolnego $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$

$$\delta_{\langle s \rangle} \leq \frac{\sqrt{17} - 3}{4} \approx 0,28078$$

$$\delta_{\langle s \rangle} \leq \frac{33 - \sqrt{577}}{32} \approx 0,2806$$

?

Czy $\delta_{\langle s \rangle}$ może być większa niż $\delta_{\mathcal{H}}$?

Jeśli nie,
stała $\delta_{\mathcal{H}}$ byłaby charakterystyczna dla baz symetrycznych, ale nie dla gęstości.

Jeśli tak,
to dla jakich ciągów otrzymujemy $\delta_{\mathcal{H}_{\langle s \rangle}} = \delta_{\mathcal{H}}$
i jak duża może być $\delta_{\mathcal{H}_{\langle s \rangle}}$?

?

Czy $\delta_{\langle s \rangle}$ może być większa niż $\delta_{\mathcal{H}}$?

Jeśli nie,

stała $\delta_{\mathcal{H}}$ byłaby charakterystyczna dla baz symetrycznych, ale nie dla gęstości.

Jeśli tak,

to dla jakich ciągów otrzymujemy $\delta_{\mathcal{H}_{\langle s \rangle}} = \delta_{\mathcal{H}}$
i jak duża może być $\delta_{\mathcal{H}_{\langle s \rangle}}$?

?

Czy $\delta_{\langle s \rangle}$ może być większa niż $\delta_{\mathcal{H}}$?

Jeśli nie,
stała $\delta_{\mathcal{H}}$ byłaby charakterystyczna dla baz symetrycznych, ale nie dla gęstości.

Jeśli tak,
to dla jakich ciągów otrzymujemy $\delta_{\mathcal{H}_{\langle s \rangle}} = \delta_{\mathcal{H}}$
i jak duża może być $\delta_{\mathcal{H}_{\langle s \rangle}}$?

?

Czy $\delta_{\langle s \rangle}$ może być większa niż $\delta_{\mathcal{H}}$?

Jeśli nie,

stała $\delta_{\mathcal{H}}$ byłaby charakterystyczna dla baz symetrycznych, ale nie dla gęstości.

Jeśli tak,

to dla jakich ciągów otrzymujemy $\delta_{\mathcal{H}_{\langle s \rangle}} = \delta_{\mathcal{H}}$
i jak duża może być $\delta_{\mathcal{H}_{\langle s \rangle}}$?

Bibliografia

- Bruckner A. M., *Differentiation of Integrals*, Amer. Math. Monthly, Vol. 78, No. 9, Part 2 (1971).
- Csörnyei M., Grahl J., O'Neil T. C., *Points of middle density in the real line*, Real Anal. Exchange 37(2) (2012), 243-248.
- Horbaczewska G., Filipczak M., Filipczak T., Wilczyński W., *Remarks on exceptional points and differentiation bases*, Acta Math. Hung. 148(2), 370-385.
- Filipczak M., Hejduk J., *On topologies associated with the Lebesgue Measure*, Tatra Mt. Math. Publ. 28 (2004), 187-197.
- Filipczak M., Filipczak T., Hejduk J., *On the Comparison of the Density Type Topologies*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena e Reggio Emilia Vol. LII (2004), 37-46.
- Kolyada V.I., *On the metric Darboux property*, Analysis Math. 9, no. 4 (1983), 291-312 (in Russian).
- Kurka O., *Optimal quality of exceptional points for the Lebesgue density theorem*, Acta Math. Hungar., 134 (3) (2012), 209-268.
- Szenes A., *Exceptional points for Lebesgue density theorem on the real line*, Adv. Math. 226, No. 1 (2011), 764-778.