Filip Strobin

Izometryczna ℓ_p-liniowalność liniowych i ciągłych przekształceń przestrzeni ℓ_p o nigdzie ciągłych odwrotnościach

(praca wspólna z M. Bieniasem)

Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej

Algebraiczne i topologiczno-algebraiczne pojęcie wielkości

Główna idea

Niech V będzie strukturą algebraiczną i $E \subset V$.
Zbiór E możemy uważać za "duży", jeżeli zawiera "dużą" podstrukturę algebraiczną.
Gdy V jest dodatkowo przestrzenią topologiczną, to możemy wymagać pewnych dodatkowych własności topologicznych od tej podstruktury - np. domkniętość, gęstość.

Definicja

Niech X będzie przestrzenią Banacha.
Powiemy, że $E \subset X$ jest *domknięto-liniowalny* (ang. *spaceable*), jeżeli $E \cup \{0\}$ zawiera nieskończenie wymiarową podprzestrzeń Banacha.
Jeżeli $E \cup \{0\}$ zawiera izometryczną kopię pewnej przestrzeni V, to E nazywamy *izometrycznie V-liniowalnym*.

Algebraiczne i topologiczno-algebraiczne pojęcie wielkości

Główna idea

Niech V będzie strukturą algebraiczną i $E \subset V$.
Zbiór E możemy uważać za "duży", jeżeli zawiera "dużą" podstrukturę algebraiczną.
Gdy V jest dodatkowo przestrzenią topologiczną, to możemy wymagać pewnych dodatkowych własności topologicznych od tej podstruktury - np. domkniętość, gęstość.

Definicja

Niech X będzie przestrzenią Banacha.
Powiemy, że $E \subset X$ jest *domknięto-liniowalny* (ang. *spaceable*), jeżeli $E \cup \{0\}$ zawiera nieskończenie wymiarową podprzestrzeń Banacha.
Jeżeli $E \cup \{0\}$ zawiera izometryczną kopię pewnej przestrzeni V, to E nazywamy *izometrycznie V-liniowalnym*.

Podstawowe oznaczenia

Niech $p \in [1, \infty)$.

– przez ℓ_p oznaczmy przestrzeń ciągów rzeczywistych, sumowalych z p-tą potęgą, ze standardową normą

$$||(x_i)||_p := \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

– przez $B(\ell_p, \ell_p)$ oznaczmy przestrzeń liniowych i ciągłych przekształceń ℓ_p w ℓ_p, z normą operatorową:

$$||F|| := \sup\{||F(x)||_p : ||x||_p \leq 1\}$$

Podstawowe oznaczenia

Niech $p \in [1, \infty)$.
– przez ℓ_p oznaczmy przestrzeń ciągów rzeczywistych, sumowalych z p-tą potęgą, ze standardową normą

$$||(x_i)||_p := \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

– przez $B(\ell_p, \ell_p)$ oznaczmy przestrzeń liniowych i ciągłych przekształceń ℓ_p w ℓ_p, z normą operatorową:

$$||F|| := \sup\{||F(x)||_p : ||x||_p \leq 1\}$$

Podstawowe oznaczenia

Niech $p \in [1, \infty)$.
– przez ℓ_p oznaczmy przestrzeń ciągów rzeczywistych, sumowalych z p-tą potęgą, ze standardową normą

$$||(x_i)||_p := \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

– przez $B(\ell_p, \ell_p)$ oznaczmy przestrzeń liniowych i ciągłych przekształceń ℓ_p w ℓ_p, z normą operatorową:

$$||F|| := \sup\{||F(x)||_p : ||x||_p \leq 1\}$$

Twierdzenie 1, M. Bienias, FS

Niech $W \subset B(\ell_p, \ell_p)$ będzie zbiorem przekształceń różnowartościowych o nigdzie ciągłych odwrotnościach. Wówczas W jest izometrycznie ℓ_p-liniowalny.

Uwaga

Jeżeli T jest przekształceniem liniowym, to T jest ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy jest ciągłe w pewnym punkcie.

Szkic dowodu

Krok 1 - przykład Creswella.
Dla $x = (x_i) \in \ell_p$, niech

$$S(x) := \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right) = \left(\frac{x_i}{i}\right)$$

Creswell [C2] pokazał, że $S \in B(\ell_p, \ell_p)$, jest różnowartościowe, $||S|| = 1$ oraz

$$||S^{-1}|| := \sup\{||S^{-1}(y)||_p : y \in S[\ell_p],\ ||y||_p \leq 1\} = \infty$$

Twierdzenie 1, M. Bienias, FS

Niech $W \subset B(\ell_p, \ell_p)$ będzie zbiorem przekształceń różnowartościowych o nigdzie ciągłych odwrotnościach. Wówczas W jest izometrycznie ℓ_p-liniowalny.

Uwaga

Jeżeli T jest przekształceniem liniowym, to T jest ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy jest ciągłe w pewnym punkcie.

Szkic dowodu

Krok 1 - przykład Creswella.
Dla $x = (x_i) \in \ell_p$, niech

$$S(x) := \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right) = \left(\frac{x_i}{i}\right)$$

Creswell [C2] pokazał, że $S \in B(\ell_p, \ell_p)$, jest różnowartościowe, $||S|| = 1$ oraz

$$||S^{-1}|| := \sup\{||S^{-1}(y)||_p : y \in S[\ell_p],\ ||y||_p \leq 1\} = \infty$$

Twierdzenie 1, M. Bienias, FS

Niech $W \subset B(\ell_p, \ell_p)$ będzie zbiorem przekształceń różnowartościowych o nigdzie ciągłych odwrotnościach. Wówczas W jest izometrycznie ℓ_p-liniowalny.

Uwaga

Jeżeli T jest przekształceniem liniowym, to T jest ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy jest ciągłe w pewnym punkcie.

Szkic dowodu

Krok 1 - przykład Creswella.
Dla $x = (x_i) \in \ell_p$, niech

$$S(x) := \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right) = \left(\frac{x_i}{i}\right)$$

Creswell [C2] pokazał, że $S \in B(\ell_p, \ell_p)$, jest różnowartościowe, $||S|| = 1$ oraz

$$||S^{-1}|| := \sup\{||S^{-1}(y)||_p : y \in S[\ell_p],\ ||y||_p \leq 1\} = \infty$$

Szkic dowodu

Krok 2 - konstrukcja izometrii
Niech (A_k) będzie rozbiciem $\mathbb{N}$ na nieskończone, parami rozłączne podzbiory, i niech $\sigma_k : A_k \to \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, będą ustalonymi bijekcjami.
Dla dowolnego $t = (t_k) \in \ell_p$, określamy funkcję F_t następująco: jeżeli $x = (x_i) \in \ell_p$, to $F_t(x)$ jest ciągiem takim, że dla $j \in \mathbb{N}$

$$F_t(x)_j := t_k \frac{1}{\sigma_k(j)} x_{\sigma_k(j)}, \quad \text{gdzie } j \in A_k$$

Krok 3 - pokazanie odpowiednich własności.
Okazuje się, że

$$||F_t(x)||_p = ||t||_p ||S(x)||_p$$

W szczególności $F_t : \ell_p \to \ell_p$. Łatwo widać, że F_t jest liniowe i w konsekwencji

$$||F_t|| = ||t||_p ||S|| = ||t||_p$$

a więc $F_t \in B(\ell_p, \ell_p)$. Jednocześnie $F : \ell_p \to B(\ell_p, \ell_p)$ jest liniowe, zatem jest izometrycznym zanurzeniem.
Nietrudno też pokazać, że każda F_t jest różnowartościowa oraz $||F_t^{-1}|| = \infty$. W szczególności,

$$F[\ell_p] = \{F_t : t \in \ell_p\} \subset W \cup \{0\}$$

Szkic dowodu

Krok 2 - konstrukcja izometrii
Niech (A_k) będzie rozbiciem $\mathbb{N}$ na nieskończone, parami rozłączne podzbiory, i niech $\sigma_k : A_k \to \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, będą ustalonymi bijekcjami.
Dla dowolnego $t = (t_k) \in \ell_p$, określamy funkcję F_t następująco: jeżeli $x = (x_i) \in \ell_p$, to $F_t(x)$ jest ciągiem takim, że dla $j \in \mathbb{N}$

$$F_t(x)_j := t_k \frac{1}{\sigma_k(j)} x_{\sigma_k(j)}, \quad \text{gdzie } j \in A_k$$

Krok 3 - pokazanie odpowiednich własności.
Okazuje się, że

$$||F_t(x)||_p = ||t||_p ||S(x)||_p$$

W szczególności $F_t : \ell_p \to \ell_p$. Łatwo widać, że F_t jest liniowe i w konsekwencji

$$||F_t|| = ||t||_p ||S|| = ||t||_p$$

a więc $F_t \in B(\ell_p, \ell_p)$. Jednocześnie $F : \ell_p \to B(\ell_p, \ell_p)$ jest liniowe, zatem jest izometrycznym zanurzeniem.
Nietrudno też pokazać, że każda F_t jest różnowartościowa oraz $||F_t^{-1}|| = \infty$. W szczególności,

$$F[\ell_p] = \{F_t : t \in \ell_p\} \subset W \cup \{0\}$$

Twierdzenie 1, M. Bienias, FS, [BiS]

Niech $W \subset B(\ell_p, \ell_p)$ będzie zbiorem przekształceń różnowartościowych o nigdzie ciągłych odwrotnościach. Wówczas W jest izometrycznie ℓ_p-liniowalny.

Uwaga 1

Twierdzenie 1 zachodzi również dla przypadku zespolonego.

Twierdzenie 2, M. Balcerzak, FS, [BaS]

Przez $Cb(B_p, \ell_p)$ oznaczmy przestrzeń ciągłych i ograniczonych funkcji f z otwartej kuli jednostkowej $B_p \subset \ell_p$ w ℓ_p, z normą supremum.
Jeżeli $p \in (1, \infty)$, to zbiór $W' \subset Cb(B_p, \ell_p)$ funkcji różnowartościowych o nigdzie ciągłych odwrotnościach jest izometrycznie ℓ_p-liniowalny.

Uwaga 2

W pracy [BiS] udowodniliśmy analogiczne twiedzenie dla kuli domkniętej $\overline{B}_p$.

Uwaga 3

Twierdzenie 2 (raczej) nie wynika z Twierdzenia 1.

Twierdzenie 1, M. Bienias, FS, [BiS]

Niech $W \subset B(\ell_p, \ell_p)$ będzie zbiorem przekształceń różnowartościowych o nigdzie ciągłych odwrotnościach. Wówczas W jest izometrycznie ℓ_p-liniowalny.

Uwaga 1

Twierdzenie 1 zachodzi również dla przypadku zespolonego.

Twierdzenie 2, M. Balcerzak, FS, [BaS]

Przez $Cb(B_p, \ell_p)$ oznaczmy przestrzeń ciągłych i ograniczonych funkcji f z otwartej kuli jednostkowej $B_p \subset \ell_p$ w ℓ_p, z normą supremum.
Jeżeli $p \in (1, \infty)$, to zbiór $W' \subset Cb(B_p, \ell_p)$ funkcji różnowartościowych o nigdzie ciągłych odwrotnościach jest izometrycznie ℓ_p-liniowalny.

Uwaga 2

W pracy [BiS] udowodniliśmy analogiczne twiedzenie dla kuli domkniętej $\overline{B}_p$.

Uwaga 3

Twierdzenie 2 (raczej) nie wynika z Twierdzenia 1.

Twierdzenie 1, M. Bienias, FS, [BiS]

Niech $W \subset B(\ell_p, \ell_p)$ będzie zbiorem przekształceń różnowartościowych o nigdzie ciągłych odwrotnościach. Wówczas W jest izometrycznie ℓ_p-liniowalny.

Uwaga 1

Twierdzenie 1 zachodzi również dla przypadku zespolonego.

Twierdzenie 2, M. Balcerzak, FS, [BaS]

Przez $Cb(B_p, \ell_p)$ oznaczmy przestrzeń ciągłych i ograniczonych funkcji f z otwartej kuli jednostkowej $B_p \subset \ell_p$ w ℓ_p, z normą supremum.
Jeżeli $p \in (1, \infty)$, to zbiór $W' \subset Cb(B_p, \ell_p)$ funkcji różnowartościowych o nigdzie ciągłych odwrotnościach jest izometrycznie ℓ_p-liniowalny.

Uwaga 2

W pracy [BiS] udowodniliśmy analogiczne twiedzenie dla kuli domkniętej $\overline{B}_p$.

Uwaga 3

Twierdzenie 2 (raczej) nie wynika z Twierdzenia 1.

Twierdzenie 1, M. Bienias, FS, [BiS]

Niech $W \subset B(\ell_p, \ell_p)$ będzie zbiorem przekształceń różnowartościowych o nigdzie ciągłych odwrotnościach. Wówczas W jest izometrycznie ℓ_p-liniowalny.

Uwaga 1

Twierdzenie 1 zachodzi również dla przypadku zespolonego.

Twierdzenie 2, M. Balcerzak, FS, [BaS]

Przez $Cb(B_p, \ell_p)$ oznaczmy przestrzeń ciągłych i ograniczonych funkcji f z otwartej kuli jednostkowej $B_p \subset \ell_p$ w ℓ_p, z normą supremum.
Jeżeli $p \in (1, \infty)$, to zbiór $W' \subset Cb(B_p, \ell_p)$ funkcji różnowartościowych o nigdzie ciągłych odwrotnościach jest izometrycznie ℓ_p-liniowalny.

Uwaga 2

W pracy [BiS] udowodniliśmy analogiczne twiedzenie dla kuli domkniętej $\overline{B}_p$.

Uwaga 3

Twierdzenie 2 (raczej) nie wynika z Twierdzenia 1.

Twierdzenie 1, M. Bienias, FS, [BiS]

Niech $W \subset B(\ell_p, \ell_p)$ będzie zbiorem przekształceń różnowartościowych o nigdzie ciągłych odwrotnościach. Wówczas W jest izometrycznie ℓ_p-liniowalny.

Uwaga 1

Twierdzenie 1 zachodzi również dla przypadku zespolonego.

Twierdzenie 2, M. Balcerzak, FS, [BaS]

Przez $Cb(B_p, \ell_p)$ oznaczmy przestrzeń ciągłych i ograniczonych funkcji f z otwartej kuli jednostkowej $B_p \subset \ell_p$ w ℓ_p, z normą supremum.
Jeżeli $p \in (1, \infty)$, to zbiór $W' \subset Cb(B_p, \ell_p)$ funkcji różnowartościowych o nigdzie ciągłych odwrotnościach jest izometrycznie ℓ_p-liniowalny.

Uwaga 2

W pracy [BiS] udowodniliśmy analogiczne twiedzenie dla kuli domkniętej $\overline{B}_p$.

Uwaga 3

Twierdzenie 2 (raczej) nie wynika z Twierdzenia 1.

Dziękuję za uwagę

Bibliografia

[*BaS*] M. Balcerzak, F. Strobin, *Spaceability of the set of continuous injections from B_{ℓ_p} into ℓ_p with nowhere continuous inverses*, Linear Algebra Appl., Volume 450, 1 (2014), 76–82.

[*BiS*] M. Bienias, F. Strobin, *Spaceability of the set of continuous linear injections from ℓ_p to ℓ_p with nowhere continuous inverses* Bulletin de la Societe des Sciences et des Lettres de Łódź, serie: Recherches sur les Deformations, Vol. LVX, no. 2 (2015), 19–25.

[*C*] S. H. Creswell, *A continuous linear bijection from ℓ_2 onto a dense subset of ℓ_2 whose inverse is everywhere unboundedly discontinuous*, Missouri J. Math. Sci. Volume 25, Issue 2 (2013), 213–214.