

Uogólnione jednomiany i wielomiany. Rozszerzenie wyników Borosa i Menzer

Marek Balcerzak, Michał Popławski

2.03.2026

Założmy, że $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ jest uogólnionym wielomianem oraz $D \subseteq \mathbb{R}^2$ jest zbiorem borelowskim miary dodatniej lub drugiej kategorii Baire’a.

Z twierdzeń Borosa i Menzer (Acta Math. Hungar. **175** (2025)) wynika, że jeśli $f(x)f(y) = 0$ dla każdego $(x, y) \in D$, to $f(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Stosując podobną technikę dowodową, pokazujemy że ten sam rezultat zachodzi, gdy zbiór D jest duży w innym sensie, tzn. gdy $D \notin \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ lub $D \notin \mathcal{N} \otimes \mathcal{M}$. Symbole $\mathcal{M}$ oraz $\mathcal{N}$ oznaczają ideały zbiorów pierwszej kategorii oraz miary zero w $\mathbb{R}$, zaś $\otimes$ oznacza produkt Fubiniego. W twierdzeniach Borosa i Menzer mamy $D \notin \mathcal{N} \otimes \mathcal{N}$ lub $D \notin \mathcal{M} \otimes \mathcal{M}$. Zauważamy, że wszystkie cztery założenia o borelowskim zbiorze D są nieporównywalne.

W podobny sposób rozszerzamy twierdzenia Borosa i Menzer dotyczące nierówności $f(x)f(y) \geq 0$ dla uogólnionych jednomianów $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dodatniego stopnia parzystego.