

O równości operatora Hutchinsona

wyniki uzyskane wspólnie z Piotrem Szucą

Niech $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_k\}$ będzie iterowanym układem odwzorowań na przestrzeni metrycznej X (tj. ciągłych przekształceń X w X). Tym samym symbolem $\mathcal{F}$ oznaczmy operator Hutchinsona, tj. odwzorowanie $\mathcal{F} : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$ zdefiniowane wzorem

$$H_{\mathcal{F}}(K) = f_1(K) \cup \dots \cup f_k(K),$$

gdzie $\mathcal{K}(X) := \{K \subset X : K \text{ jest niepusty i zwarty}\}$.

Atraktorem $\mathcal{F}$ nazywamy taki zbiór $A \in \mathcal{K}(X)$, że

- (i) $A = \mathcal{F}(A) = f_1(A) \cup \dots \cup f_k(A)$;
- (ii) dla każdego $K \in \mathcal{K}(X)$, ciąg iteracji $\mathcal{F}^{(n)}(K)$ jest zbieżny do A względem metryki Hausdorffa na $\mathcal{K}(X)$.

Z twierdzenia Hutchinsona wiemy, że IFS-y złożone z kontrakcji Banacha na zupełnych przestrzeniach metrycznych generują atraktory, istnieją jednak przykłady niekontrakcyjnych układów IFS z atraktorami.

Podczas referatu pokażę, że jeśli IFS $\mathcal{F}$ na zwartej przestrzeni metrycznej X generuje atraktor, to rodzina iteracji $\{\mathcal{F}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ operatora Hutchinsona jest równością. Rezultat ten rozszerza niektóre uzyskane wcześniej wyniki w których tezę użytkano przy pewnych dodatkowych założeniach. Podam również kilka przykładów ilustrujących wynik i jego optymalność, np. IFS $\mathcal{F}$ z atraktorem, dla którego rodzina wszystkich złożań jego odwzorowań nie jest równością, oraz przykład takiego pojedynczego odwzorowania f na okręgu jednostkowym z kontrakcyjnym punktem stałym, że rodzina złożań $\{f^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ nie jest równością.