Pytania z matematyki na egzamin magisterski (rok zakończenia studiów 2018)
Studia magisterskie II stopnia

Na egzaminie student (studentka) losuje zestaw trzech pytań, z którego wybiera dwa pytania, z których jest egzaminowany (egzaminowana).
Każda odpowiedź powinna zawierać: definicje podstawowych pojęć, najważniejsze twierdzenia, przykłady (kontrprzykłady) i zastosowania.

1. Relacja równoważności, zasada abstrakcji, przykłady.
2. Definicja różniczkowalności funkcji jednej i wielu zmiennych, interpretacja geometryczna, warunek wystarczający różniczkowalności dla funkcji wielu zmiennych.
3. Twierdzenie o lokalnym dyfeomorfizmie dla funkcji wielu zmiennych, dyfeomorfizm klasy C_n.
4. Definicja ekstremum lokalnego funkcji w punkcie. Warunek konieczny i warunki wystarczające istnienia ekstremum lokalnego funkcji jednej zmiennej.
5. Definicja szeregu liczbowego. Zbieżność szeregów liczbowych - kryteria zbieżności.
6. Określenie ciągu funkcyjnego. Zbieżność punktowa i jednostajna ciągu funkcyjnego.
7. Definicja szeregu funkcyjnego. Zbieżność punktowa i jednostajna na zbiorze.
8. Szeregi potęgowe i ich zbieżność. Własności sumy szeregu potęgowego.
9. Przestrzenie liniowe. Liniowa zależność i niezależność układu wektorów. Baza i wymiar przestrzeni liniowej.
10. Definicja przekształcenia liniowego. Jądro, obraz i rząd odwzorowania liniowego.
11. Przestrzeń probabilistyczna. Prawdopodobieństwo warunkowe, prawdopodobieństwo całkowite.
12. Definicja zmiennej losowej. Zmienna losowa i jej rozkład. Charakterystyki liczbowe zmiennej losowej.
13. Niezależność zdarzeń i zmiennych losowych.
14. Podać warunek równoważny całkowalności funkcji w sensie Riemanna. Związek całki Lebesgue'a i Riemanna, podać przykład, że pojęcia te nie są równoważne.
15. Definicja przestrzeni topologicznej oraz bazy topologii. Warunek równoważny na bycie bazą topologii.
16. Aksjomaty oddzielania dla przestrzeni topologicznych: T_i, dla $i = 0, 1, 2, 3, 3.5, 4$ (Omówić dwa wskazane przez komisję typy).
17. Warunki równoważne na bycie T_i−przestrzenią, $i = 0, 1, 2, 3, 3.5, 4$. (Podać dwa wskazane przez komisję).
18. Topologiczna definicja ciągłości funkcji. Warunki równoważne (podać co najmniej trzy).
19. Definicja przestrzeni zwartej, spójnej oraz ich ciągłe obrazy.
20. Podać twierdzenie o zwartym podzbiorze przestrzeni Hausdorffa oraz o domkniętym podzbiorze przestrzeni zwartej.
21. Definicja σ-ciała i miary na σ-ciele. σ-ciało zbiorów borelowskich.
22. Funkcje mierzalne i ich własności.
23. Definicja całki Lebesgue'a - trzy etapy (dla funkcji prostej, dla funkcji mierzalnej nieujemnej, ogólny przypadek).
24. Definicja przestrzeni unormowanej. Trzy twierdzenia dla przestrzeni unormowanych skończenie wymiarowych (o zbieżności, zupełności i domkniętości).
25. Lemat Riesza z interpretacją geometryczną, zbiory zwarte (definicja), wniosek z lematu Riesza.
26. Przestrzeń unormowana operatorów liniowych i ograniczonych (definicja). Dwa twierdzenia: o ciągłości operatora liniowego i Banacha o operatorze odwrotnym.
27. Norma operatora liniowego (trzy równoważne definicje). Twierdzenie Banacha-Steinhausa z wnioskiem.
28. Operator liniowy ograniczony (definicja). Dwa twierdzenia o rozszerzaniu: dla operatorów i funkcjonałów (twierdzenie Hahna-Banacha).

29. Przestrzeń Hilberta (definicja), nierówność Schwarza, identyczność równoległoboku. Twierdzenie o zbiorze wypukłym w przestrzeni Hilberta.
30. Rezolwenta równania różniczkowego liniowego, jej własności i wykorzystanie.
31. Trajektorie równania autonomicznego, ich rodzaje. Jak znajdować najprostsze z nich?
32. Pojęcie stabilności i asymptotycznej stabilności rozwiązania równania różniczkowego. Jak badamy stabilność rozwiązań stacjonarnych?
33. Rodzaje punktów stałych układów dynamicznych na płaszczyźnie.
34. Klasyfikacja równań cząstkowych liniowych rzędu drugiego.
35. Pojęcie charakterystyki równania cząstkowego liniowego rzędu 2 i jego rola.
36. Pojęcie i własności gałęzi jednoznacznej logarytmu w dziedzinie zespolonej.
37. Pojęcie, własności i zastosowania odwzorowań homograficznych zespolonej płaszczyzny domkniętej.
38. Twierdzenie i wzór Cauchy’ego oraz ich zastosowania.
39. Przykłady geometrycznych zasad w analizie zespolonej.
40. Klasyfikacja odosobnionych punktów osobliwych funkcji holomorficznych w ich sąsiedztwie.
41. Pojęcie, własności i zastosowanie residuum funkcji.